Bind 205-207 Math

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und Hans Rohrbach

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, A. Grothendieck, P. R. Halmos, O. Haupt,
F. Hirzebruch, E. Hopf, M. Kneser, G. Köthe, K. Prachar,
P. Roquette, W. Schmeidler, L. Schmetterer, E. Stiefel

Band 206

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1961

Archiv-Nr. 180361
Satz und Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 30
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis des Bandes 206

Seite

Barner, Martin, Zur Möbius-Geometrie: Die Inversionsgeometrie ebener Kurven 192

Cigler, Johann, Ein gruppentheoretisches Analogon zum Begriff der normalen Zahl 5

Erdös, P., Über einige Probleme der additiven Zahlentheorie 61

Kiesewetter, H., Struktur linearer Funktionalgleichungen im Zusammenhang mit dem Abelschen Theorem 113

Klingen, Helmut, Volumbestimmung des Fundamentalbereichs der Hilbertschen Modulgruppe n-ten Grades 9

Krückeberg, Fritz, B_2-Folgen und verwandte Zahlenfolgen 53

Krzywoblocki, M. Z. v., On the Existence Proof of the Flow in the Boundary Layer in a Compressible Fluid. I. 175

Lekkerkerker, C. G., Eine Mordell'sche Methode in der Geometrie der Zahlen 20

Le Veque, W. J., Rational points on curves of genus greater than 1. 45

Maier, W. und **Wutzler, G.,** Zur zyklischen Struktur gewisser Funktionalgleichungen 172

Müller, Bruno, Einige Abschätzungen der Dichte von Summenmengen in lokalkompakten abelschen Gruppen 39

Prachar, K., Über die kleinste Primzahl einer arithmetischen Reihe 3

Rieger, G. J., Zur Statistik der Primfaktoren der natürlichen Zahlen in arithmetischen Progressionen 26

Richert, Hans-Egon, Zur multiplikativen Zahlentheorie 31

Rohrbach, Hans, Bericht über das Symposium zur Zahlentheorie 1960 in Oberwolfach/Schwarzwald 1

Schwarz, Wolfgang, Zur Darstellung von Zahlen durch Summen von Primzahlpotenzen 75

Wutzler, G. siehe **Maier, W.** und **Wutzler, G.**

Ausgabedaten der Hefte von Bd. 206

Heft 1/2 ausgegeben am 18. April 1961

Heft 3/4 ausgegeben am 15. Mai 1961

Bericht über das Symposium zur Zahlentheorie 1960 in Oberwolfach/Schwarzwald.

Von *Hans Rohrbach* in Mainz.

Das Mathematische Forschungsinstitut in Oberwolfach/Schwarzwald hatte für die Zeit vom 5. bis 10. September 1960 zu einem Symposium über Zahlentheorie eingeladen, bei dem insbesondere Fragen der additiven Zahlentheorie und der Theorie der diophantischen Approximationen diskutiert wurden. Etwa 40 Teilnehmer fanden sich zu einer Woche intensiven Gedankenaustausches zusammen, für den die Vorträge die geeignete Grundlage und die persönliche Atmosphäre des Hauses den geistigen Raum darboten. Vorbereitung und Durchführung des Symposiums lag in den Händen von Th. Schneider, Freiburg/Br.

Von den auf dem Symposium vorgetragenen Arbeiten werden 10 im vorliegenden Heft geschlossen veröffentlicht: *K. Prachar*, Über die kleinste Primzahl einer arithmetischen Reihe; *J. Cigler*, Ein gruppentheoretisches Analogon zum Begriff der normalen Zahl; *H. Klingen*, Volumbestimmung des Fundamentalbereichs der Hilbertschen Modulgruppe n-ten Grades; *C. G. Lekkerkerker*, Eine Mordellsche Methode in der Geometrie der Zahlen; *H. E. Richert*, Zur multiplikativen Zahlentheorie; *B. Müller*, Einige Abschätzungen der Dichte von Summenmengen in lokalkompakten abelschen Gruppen; *W. J. LeVeque*, Rational points on curves of genus greater than one; *F. Krückeberg*, B_2-Folgen und verwandte Zahlenfolgen; *P. Erdös*, Über einige Probleme der additiven Zahlentheorie; *E. Wirsing*, Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades.

Die weiteren auf dem Symposium vorgetragenen Arbeiten sind bereits veröffentlicht oder anderweitig zur Veröffentlichung eingereicht: *J. W. S. Cassels*, Der Zusammenhang zwischen Lösbarkeit im Kleinen und im Großen bei Kurven vom Geschlecht 1 (Journal f. d. r. u. a. Math. 203, 174—208, 1960); *H. Davenport*, Neuere Fortschritte in der additiven Zahlentheorie (wird im Jahresbericht der D. M. V. erscheinen); *H. Ehlich*, Über die Lösungen der Gleichung $x^a - [x^a] = x^b - [x^b] = x^c - [x^c]$ (Math. Zeitschr. 75, 1961); *O. Herrmann*, Anwendung zahlentheoretischer Methoden auf Probleme der Variationsrechnung im Großen (erscheint in Hab. Schrift Heidelberg); *E. Hlawka*, Erbliche Eigenschaften in der Theorie der Gleichverteilung (Publ. Math. Debrecen 7, 1960); *H. J. Kanold*, Über multiplikativ benachbarte Funktionen (wird in den Abh. Math. Sem. Hamburg erscheinen); *H. W. Knobloch*, Eine Summenformel für Laplace-Transformierte und ihre Anwendung auf Dirichlet-Reihen (wird im Archiv d. Math. erscbeinen); *D. J. Lewis*, On representation of integers by binary forms (Acta Arithmetica 7, 1961, gemeinsam mit *K. Mahler*); *P. Mullender*, Überdeckungsgitter und unausdehnbare Sternkörper (wird in englischer Sprache im Nieuw Archief voor Wiskunde erscheinen); *J. Popken*, Arithmetical properties of the Taylor coefficients of algebraic functions (Proceedings Acad.

Sciences Amsterdam, Ser. A, 62, 202—210, 1959); *R. A. Rankin*, Multiplicative functions and operators of Hecke type (wird in den Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae erscheinen); *L. Rédei*, Über ein additiv-zahlentheoretisches Problem (wird in Acta Scient. Math. Szeged 22, 1961 erscheinen); *P. Turán*, Über einige neuere Sätze der Theorie der diophantischen Approximationen mit Anwendungen auf die Primzahlverteilung (enthalten im Buch des Verf., das in der Serie der Interscience Tracts erscheint); *B. Volkmann*, Ein metrisches Problem bei der Gleichverteilung von Zahlenfolgen (wird in den Abh. Math. Sem. Hamburg erscheinen).

Außerdem wurden zwei Beiträge dem Symposium vorgelegt, zu deren Vortrag die Verfasser nicht persönlich anwesend sein konnten. Von diesen erscheint der Beitrag *G. J. Rieger*, Zur Statistik der Primfaktoren der natürlichen Zahlen in arithmetischen Progressionen, im vorliegenden Heft; der Beitrag *E. Härtter*, Eine Verallgemeinerung des Basisbegriffs in der additiven Zahlentheorie, erschien im Journ. f. d. r. u. a. Math. 205, 197—220, 1960.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei noch bemerkt, daß der Titel eines Vortrags, der auf dem Symposium gehalten wurde, nicht immer mit dem Titel der im obigen Quellennachweis aufgeführten diesbezüglichen Arbeit übereinstimmt.

Über die kleinste Primzahl einer arithmetischen Reihe.

Von *K. Prachar* in Wien.

Sei k eine genügend große natürliche Zahl und l eine zu k teilerfremde Zahl $< k$. Wenn die Riemannsche Vermutung für alle L-Funktionen, die zu Charakteren mod k gehören, richtig ist, so gilt für die kleinste Primzahl $p(k, l)$, welche $\equiv l \pmod{k}$ ist, die Abschätzung

$$p(k, l) < ck^2 \log^4 k.$$

Unter derselben Annahme bewies *P. Turàn* (Acta Szeged **8** (1936/37), 226), daß

$$p(k, l) < k \log^{2+\varepsilon} k$$

für fast alle Progressionen richtig ist, genauer: Die Anzahl der $l \bmod k$, $(l, k) = 1$, für die dies nicht gilt, ist $o(\varphi(k))$ für $k \to \infty$. Von *U. V. Linnik* wurde $p(k, l) < k^c$, mit einer von k unabhängigen Konstanten c, ohne die Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung bewiesen (Matemat. Sbornik **15** (1944), 3). Andererseits zeigte *P. Erdös* (Acta Szeged **13** (1949), 57), daß für mehr als $c_1 \varphi(k)$ Progressionen $p(k, l) < c_2 \varphi(k) \log k$ gilt und daß $p(k, l) < (1 + c_3)\, \varphi(k) \log k$ bei passendem c_3 nicht für fast alle Progressionen richtig sein kann.

In dieser Note zeigen wir den

Satz. *Zu jedem l gibt es unendlich viele k, für die mit einer von k unabhängigen Konstanten c*

$$p(k, l) > ck \log k \frac{\log_2 k \log_4 k}{(\log_3 k)^2} \tag{1}$$

ist.

Beweis. Sei n eine natürliche Zahl mit $n \leqq U = \delta p_r \log p_r \log_3 p_r / \log_2^2 p_r$, wobei p_r die r-te Primzahl bedeute und $\delta > 0$ später bestimmt wird. Sei ferner $X = \log p_r$, $Y = \exp(\alpha \log U \log_3 U / \log_2 U)$, wobei α ebenfalls später gewählt wird, und $Z = \frac{1}{2} p_r$.

Es wird nun k zunächst nach dem Modul $\prod\limits_{\substack{p \leqq X \\ Y < p \leqq Z}} p$ bestimmt, indem wir verlangen

$$k \equiv l \pmod{p} \quad \text{für jedes } p \leqq X \text{ und jedes } p \text{ mit } Y < p \leqq Z. \tag{2}$$

Wenn dann $n + 1$ durch ein $p \leqq X$ oder durch ein p mit $Y < p \leqq Z$ teilbar ist, gilt

$$l + nk \equiv 0 \pmod{p} \tag{3}$$

für die betreffende Primzahl p. Wir betrachten nun die Zahlen $n < U$, für die $n + 1$ nicht durch ein $p \leqq X$ und auch nicht durch ein p mit $Y < p \leqq Z$ teilbar ist. Wegen $XZ > U + 1$ kann ein solches $n + 1$, wenn es einen Primfaktor $> Z$ enthält, keinen Primfaktor $> X$ enthalten. Ein solches $n + 1$ besteht also entweder 1) nur aus Primfaktoren p mit $X < p \leqq Y$ oder ist 2) eine Primzahl q mit $Z + 1 < q \leqq U + 1$.

Die Anzahl A_1 der $n < U$ mit der Eigenschaft 1) ist nach einem Resultat von *Rankin* (Journal of the London Math. Soc. **13** (1938), 242; man vergleiche auch die dort zitierte Literatur)

$$A_1 < U \exp\left\{-\frac{\log U}{\log Y}\log_3 Y + \log_2 Y + o(\log_2 Y)\right\}. \tag{4}$$

Wir betrachten nun zu jedem p mit $X < p \leqq Y$ eine feste zu p teilerfremde Restklasse $r_p > 1$ (also $1 < r_p < p$). Mit Hilfe der *Brun*schen Siebmethode folgt, daß für die Anzahl A_2 der Primzahlen q, $Z + 1 < q \leqq U + 1$, welche für kein p mit $X < p \leqq Y$ die Kongruenz $q \equiv r_p \pmod p$ erfüllen,

$$A_2 < c_4 \frac{U}{\log U} \prod_{X < p \leqq Y}\left(1 - \frac{1}{p}\right) < c_5 \frac{U \log X}{\log U \log Y}. \tag{5}$$

gilt; solche q sollen mit q' bezeichnet werden. k soll nun noch so festgelegt werden, daß

$$l + (r_p - 1)\, k \equiv 0 \pmod p \tag{6}$$

ist für jedes p mit $X < p \leqq Y$. Dies ist möglich, da wegen $r_p > 1$ die Zahl $r_p - 1$ zu p teilerfremd ist.

Man rechnet nun sofort nach, daß auf Grund der Wahl von X, Y, Z, U jedenfalls $Z < p_r < U$ ist und bei genügend kleinem α und genügend kleinem $\delta < \delta_0(\alpha)$ gilt:

$$A_1 + A_2 + 1 < \pi(p_r) - \pi(Z) \sim \frac{1}{2}\frac{p_r}{\log p_r}.$$

Wenn nun die n mit $n \leqq U$, für die $n + 1$ nur aus Primfaktoren p mit $X < p \leqq Y$ besteht, und die n, für die $n + 1 = q'$ ist, durchlaufend mit $n_1, \ldots, n_m$ bezeichnet werden, ist also $m + 1 < \pi(p_r) - \pi(Z)$ und man kann verschiedene Primzahlen $p'_1, p'_2, \ldots, p'_m$ mit $Z < p'_j \leqq p_r$ wählen und k so bestimmen, daß

$$l + n_j k \equiv 0 \pmod{p'_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{7}$$

gilt. Zwar könnte n_j durch p'_j teilbar sein; jedoch kann n_j nicht durch zwei verschiedene $p, p' > Z$ teilbar sein, so daß man, wenn ein p sich für ein bestimmtes n_j als unbrauchbar erweist, jedenfalls sicherlich alle anderen p verwenden kann. Insgesamt ist nun k nach einem Modul, der Teiler von $\prod_{p \leqq p_r} p$ ist, bestimmt, und man kann k so wählen, daß

$$\prod_{p \leqq p_r} p < k \leqq 2 \prod_{p \leqq p_r} p$$

ist. Für jedes $n < \delta p_r \log p_r \log_3 p_r / \log_2^2 p_r$ ist $l + nk$ durch mindestens ein p mit $p \leqq p_r$ teilbar und sicher $> p_r$, daher keine Primzahl. Wegen $p_r > \frac{1}{2}\log k$ folgt die Behauptung.

Eingegangen 14. September 1960.

Ein gruppentheoretisches Analogon zum Begriff der normalen Zahl.

Von *Johann Cigler* in Mainz.

Wir nennen eine Zahl $x \in [0, 1)$ normal zu einer Basis a ($a > 1$ ganz), wenn die Folge $\{a^n x\}$ gleichverteilt mod 1 ist. Diese Definition ist mit der üblichen äquivalent (vgl. z. B. I. Niven [4], S. 110). Die wichtigsten Resultate über normale Zahlen sind die folgenden:

1) *Fast alle Zahlen $x \in [0, 1)$ sind normal zur Basis a.*

2) *Ist die Zahl x normal bezüglich der Basis a, dann ist sie es auch bezüglich jeder Potenz a^k als Basis, und ist umgekehrt x normal bezüglich einer Potenz a^k, dann auch bezüglich a.*

3) *Mit x ist auch $\frac{p}{q} x$ ($p \neq 0$, $q \neq 0$ ganz) normal zur Basis a.*

Führt man auf $[0, 1)$ die Transformation $Tx = ax - [ax]$ ein, so sieht man, daß die Folge $\{a^n x\}$ mod 1 mit der Folge $\{T^n x\}$ übereinstimmt. Diese Transformation ist ein stetiger Endomorphismus der additiven Gruppe der reellen Zahlen mod 1 auf sich und ist daher auch maßtreu bezüglich des Lebesgueschen Maßes auf $[0, 1)$, das mit dem Haarschen Maß auf der Gruppe übereinstimmt.

Es ist nun möglich, bei geeigneter Definition der Normalität eines Gruppenelementes, alle drei genannten Sätze auf kompakte abelsche Gruppen zu übertragen. Das soll im folgenden durchgeführt werden.

Sei X eine kompakte abelsche Gruppe (in additiver Schreibweise) mit abzählbarer Basis und sei T ein stetiger Endomorphismus, der X auf sich abbildet und der ergodisch bezüglich des Haarschen Maßes μ auf X ist. Die Bedingung der Ergodizität kann durch eine rein algebraische ersetzt werden, und zwar folgendermaßen (vgl. W. A. Rochlin [5]): Sei X^* die Charakterengruppe von X. In X^* entspricht dem Endomorphismus T eine Transformation T^*, gegeben durch $T^* \chi(x) = \chi(Tx)$ für alle Charaktere $\chi \in X^*$. Sind für jeden nichttrivialen Charakter χ alle Funktionen der Gestalt $\chi(T^n x)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) voneinander verschieden, so heißt T^* aperiodisch. Der Endomorphismus T ist nun genau dann ergodisch, wenn T^* aperiodisch ist.

Wir nennen eine Folge $\{x_n\}$ von Elementen aus X μ-gleichverteilt, wenn für jede stetige Funktion f auf X die Relation

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \mu(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

erfüllt ist.

Ist eine Aussage für alle $x \in X$ gültig mit Ausnahme einer Menge, deren Haarsches Maß Null ist, so sagen wir, sie sei für fast alle $x \in X$ gültig. Im übrigen verweisen wir bezüglich der verwendeten Begriffe und Notationen auf [1].

Definition. *Ein Element $x \in X$ heißt normal bezüglich T, wenn die Folge $\{T^n x\}$ μ-gleichverteilt ist.*

Da nach Voraussetzung T ein stetiger ergodischer Endomorphismus ist, ist T auch maßtreu bezüglich des Haarschen Maßes μ. Daraus folgt nun unmittelbar unter Verwendung des individuellen Ergodensatzes der

Satz 1. *Fast alle $x \in X$ sind normal bezüglich T.*

Weiter gilt der

Satz 2. *Ist x normal bezüglich T, dann ist es auch normal bezüglich T^k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.*

Beweis. Das ist eine unmittelbare Folgerung aus [1], Satz 7; denn ist T ergodisch, dann auch jede Potenz von T, wie aus der algebraischen Charakterisierung eines ergodischen Endomorphismus unmittelbar folgt.

Ebenso einfach beweist man den

Satz 3. *Ist x normal bezüglich T^k für irgendein $k \geqq 2$, dann ist es auch normal bezüglich T.*

Beweis. Wir benötigen nur die Tatsache, daß T maßtreu ist, d. h. die Relation $\int_X f(Tx)\,d\mu(x) = \int_X f(x)\,d\mu(x)$ für jedes stetige f auf X. Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) + f(T^k x) + \cdots + f(T^{kn} x)}{n} = \mu(f)$$

für jedes $f \in C(X)$. Ersetzt man $f(x)$ durch die ebenfalls stetige Funktion $f(T^l x)$ $(l \geqq 1$ ganz), so ergibt sich, weil T maßtreu ist,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(T^l x) + f(T^{k+l} x) + \cdots + f(T^{kn+l} x)}{n} = \mu(f).$$

Addiert man diese Ausdrücke für $l = 0, 1, \ldots, k-1$ und dividiert durch k, so erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) + f(Tx) + \cdots + f(T^{kn} x)}{kn} = \mu(f),$$

was mit der Behauptung äquivalent ist.

Trivial ist der folgende Satz:

Satz 4. *Ist x normal bezüglich T und S ein stetiger Endomorphismus von X auf sich, der mit T vertauschbar ist, so ist auch Sx normal bezüglich T.*

Beweis. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j \leq n} f(T^j Sx) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j \leq n} f(ST^j x) = \int_X f(Sx)\,d\mu(x) = \int_X f(x)\,d\mu(x).$$

Etwas tiefer liegt der

Satz 5. *Ist x normal bezüglich T und S ein stetiger Endomorphismus von X auf sich, der mit T vertauschbar ist, und ist außerdem der Kern N dieses Endomorphismus endlich, dann ist auch $S^{-1}x$ normal bezüglich T, wobei $S^{-1}x$ ein beliebiges Urbild von x bedeutet.*

Beweis. Da S ein stetiger Endomorphismus von X auf sich ist, dessen Kern endlich ist, gibt es eine offene Menge B mit den folgenden Eigenschaften[1]):

---

[1]) Man wähle eine genügend kleine offene Umgebung U_1 von 0, deren Urbild aus k punktfremden offenen Mengen besteht. Diejenige Menge davon, die 0 enthält, nennen wir B_1. Die anderen gehen aus B_1 durch Translation mit den Elementen n_i hervor. Sei $x \notin \overline{\bigcup_{i=1}^{k} (B_1 + n_i)}$. Dann gibt es eine Umgebung U_2 von Sx, die mit U_1

a) $S\overline{B} = X$.

b) Aus $Sx = Sy$ für zwei Elemente $x, y \in B$ folgt $x = y$.

c) $0 \in B$.

Wir erweitern die Menge B durch Punkte ihres Randes zu einer Menge A_1, für die $SA_1 = X$ und die Bedingung b) erfüllt ist. Seien $n_1 = 0, n_2, \ldots, n_k$ die Elemente des Kerns N, also die Gruppenelemente, die durch den Endomorphismus S in die Null abgebildet werden. Wir bilden die Mengen $A_1 + n_i = A_i$. Dann sind je zwei A_i, A_j mit $i \neq j$ punktfremd und es ist $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = X$. Jedes A_i bildet eine Gruppe, wenn man die Gruppenoperation durch $x + y = z$ definiert, wobei z das eindeutig bestimmte Element aus A_i ist, für das $S(x + y) = Sz$ gilt. Die Menge A_i wird dabei algebraisch isomorph zur Restklassengruppe X/N. Wir führen in A_i auch die Topologie von X/N ein und machen es dadurch zu einer kompakten abelschen Gruppe.

Wir zerlegen den k-deutigen Endomorphismus von X auf sich in k eindeutige Transformationen S_i von A_i auf X. Es gilt dabei $SA_i = X$ und $S_i^{-1} X = A_i$.

Das Haarsche Maß auf X ist auch invariantes Maß auf A_i. Denn sei C eine beliebige offene Menge mit $C < A_i$. Sei φ_c die charakteristische Funktion von C und $f_c(x)$ definiert durch

$$f_c(x) = \varphi_c(x) \quad \text{für} \quad x \in A_i$$

und

$$f_c(x + n_j) = f_c(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Dann gilt

$$\int_{A_i} \varphi_c(x + y)\, d\mu(x) = \frac{1}{k} \int_X f_c(x + y)\, d\mu(x) = \frac{1}{k} \int_X f_c(x)\, d\mu(x) = \int_{A_i} \varphi_c(x)\, d\mu(x).$$

Ist $\overline{\mu}$ das normierte Haarsche Maß auf A_i, so erhält man also $\overline{\mu}(f) = k\mu(f)$ für jede integrierbare Funktion f auf A_i.

Man kann S auch als eine — umkehrbar eindeutige — Transformation von X/N auf X auffassen. Ist $\{x_n\}$ eine μ-gleichverteilte Folge auf X, dann ist $\{S^{-1}x_n\}$ auf X/N eine $\overline{\mu}$-gleichverteilte Folge. Dazu bemerken wir, daß man in der Definition der μ-Gleichverteilung den Raum aller stetigen Funktionen auch durch die Menge aller charakteristischen Funktionen aller offenen Mengen M, deren Rand das Maß Null besitzt, ersetzen kann (vgl. [2]). Die Behauptung folgt dann aus der Gleichung

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{M/N}(S^{-1}x_j) = \lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{M'}(x_j) = \mu(M') = \overline{\mu}(M/N).$$

Dabei bedeutet M' die Menge $S(M/N)$. Die linke Seite ergibt sich aus der Äquivalenz der beiden Aussagen $S^{-1}x_\nu \in M/N$ und $x_\nu \in M'$. Betrachtet man speziell die zu X/N isomorphe Gruppe A_i, so ergibt sich wegen $\overline{\mu}(f) = k\mu(f)$ die Relation

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi_M(S_i^{-1}x_\nu) = \overline{\mu}(M) = k\mu(M)$$

für jede offene Menge M mit den angegebenen Eigenschaften, die ganz in A_i liegt.

---

keinen Punkt gemeinsam hat und deren Urbild aus k getrennten offenen Mengen besteht. Diese sind offenbar fremd zu $\bigcup_{i=1}^{k} (B_1 + n_i)$. Sei B_2 diejenige unter ihnen, die den Punkt x enthält. Ist y ein Punkt mit $y \notin \bigcup_{i=1}^{k} \{(B_1 + n_i) \cup (B_2 + n_i)\}$, so führen wir dasselbe Verfahren noch einmal durch, usw. Da X eine abzählbare Basis besitzt, bekommen wir auf diese Weise eine offene Menge $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, deren Bild in X dicht ist. Man kann dabei die B_i so wählen, daß der Rand von B das Maß 0 besitzt.

Um nun Satz 5 zu beweisen, gehen wir folgendermaßen vor: Wir betrachten den Ausdruck $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_M(T^jS^{-1}x)$, wobei M o. B. d. A. eine offene Menge sei, deren Rand das Maß Null besitzt und die ganz in A_i liegt. Wegen $ST = TS$ ist $T^jS^{-1}x = S_i^{-1}T^jx$ für ein gewisses i erfüllt, das natürlich von j abhängen wird. Wir zerlegen $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_M(T^jS^{-1}x)$ in k Summen derart, daß in jeder Summe die Glieder $\varphi_M(S_i^{-1}T^jx)$ mit gleichem i gesammelt werden:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_M(T^jS^{-1}x) = \frac{1}{n}\sum_{j_1\leq n}{}'\,\varphi_M(S_1^{-1}T^{j_1}x) + \cdots + \frac{1}{n}\sum_{j_k\leq n}{}'\,\varphi_M(S_k^{-1}T^{j_k}x).$$

Sei ν ein beliebiges Häufungsmaß dieser Folge. Dann gilt für jede unserer Mengen M

$$\nu(M) \leqq k\mu(M).$$

Es ist also $\nu \ll \mu$. Andererseits ist ν trivialerweise invariant bezüglich T, es ist daher nach [1], Satz 1 — weil μ ergodisch ist — die Relation $\nu = \mu$ erfüllt. Da ν ein beliebiges Häufungsmaß war, existiert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_M(T^jS^{-1}x) = \int_X \varphi_M(x)\,d\mu(x),$$

womit Satz 5 bewiesen ist.

Spezialfälle:

1) Sei X die k-dimensionale Torusgruppe und T die Abbildung

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_k \end{pmatrix} = A\mathfrak{x}, \quad a > 1 \text{ ganz.}$$

Die bezüglich dieser Transformation normalen $\mathfrak{x}$ stimmen mit den von J. E. Maxfield [3] betrachteten normalen k-tupeln überein. In diesem Falle sind alle unsere Sätze bereits bekannt. Satz 5 wurde mit einer anderen Methode bewiesen, die im allgemeinen Fall versagen dürfte. Er lautet folgendermaßen: Ist $\mathfrak{x}$ ein normales k-tupel, dann auch $B\mathfrak{x}$, wobei B eine beliebige nichtsinguläre Matrix mit rationalen Elementen bedeutet.

2) Sei X wieder die k-dimensionale Torusgruppe und Tx die Abbildung $\mathfrak{x} \to A\mathfrak{x}$, wobei A eine quadratische k-zeilige Matrix mit ganzzahligen Elementen ist, deren Determinante nicht verschwindet und für die außerdem kein Eigenwert eine Einheitswurzel ist. Diese Bedingungen sind in diesem Fall äquivalent mit den Rochlinschen (vgl. [5]). Satz 1 und Satz 2 wurden schon in [1] bewiesen. Die Sätze 4 und 5 kann man folgendermaßen formulieren: Sei B eine nichtsinguläre Matrix, die mit A vertauschbar ist, dann ist mit $\{A^n\mathfrak{x}\}$ auch $\{A^nB\mathfrak{x}\}$ und $\{A^nB^{-1}\mathfrak{x}\}$ gleichverteilt mod 1.

Literatur.

[1] *J. Cigler*, Der individuelle Ergodensatz in der Theorie der Gleichverteilung mod 1, J. reine u. angew. Math. **205** (1960), 91—100.

[2] *E. Hlawka*, Folgen auf kompakten Räumen, Abh. math. Sem. Hambg. **20** (1956), 223—241.

[3] *J. E. Maxfield*, Normal k-tuples, Pacific J. Math. **3** (1953), 189—196.

[4] *I. Niven*, Irrational numbers, Carus Math. Monogr. **11**, 1956.

[5] *W. A. Rochlin*, Über Endomorphismen von kompakten abelschen Gruppen, Iswest. Akad. Nauk **13** (1949), 329—340 (russ.).

Eingegangen 26. September 1960.

Volumbestimmung des Fundamentalbereichs der Hilbertschen Modulgruppe n-ten Grades *).

Von *Helmut Klingen* in Göttingen.

1. Es sei K ein total-reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade r über dem rationalen Zahlkörper P. Die Hilbertsche Modulgruppe n-ten Grades $\Gamma_n(\mathsf{K})$ besteht aus den $2n$-reihigen in K ganzen Lösungen M der Matrizengleichung

$$M' I M = I, \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei bedeutet M' die zu M transponierte Matrix und E die n-reihige Einheitsmatrix. $\Gamma_n(\mathsf{K})$ gestattet eine diskontinuierliche Darstellung in dem r-fachen cartesischen Produkt $\mathfrak{H}_n$ des Siegelschen Halbraums,

$$\mathfrak{H}_n = \{(Z_1, \ldots, Z_r) \mid Z_\nu = X_\nu + iY_\nu,\ Y_\nu > 0,\ \nu = 1, \ldots, r\},$$

wobei also $Z_1, \ldots, Z_r$ n-reihige komplexe symmetrische Koordinatenmatrizen sind. Die erwähnte Darstellung von $\Gamma_n(\mathsf{K})$ wird dann geliefert durch die simultanen Abbildungen

$$W_\nu = (A^{(\nu)} Z_\nu + B^{(\nu)})(C^{(\nu)} Z_\nu + D^{(\nu)})^{-1} \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

(abgekürzt $W_\nu = M^{(\nu)}\langle Z_\nu\rangle$ oder auch einfach $W = M\langle Z\rangle$), wobei $M^{(\nu)} = \begin{pmatrix} A^{(\nu)} B^{(\nu)} \\ C^{(\nu)} D^{(\nu)} \end{pmatrix}$ die zu $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ im Sinne der Algebra konjugierten Matrizen sind. $\Gamma_1(\mathsf{K})$ ist also die Hilbertsche Modulgruppe, $\Gamma_n(\mathsf{P})$ die Modulgruppe n-ten Grades.

Automorphe Funktionen zu $\Gamma_n(\mathsf{K})$ wurden in neuerer Zeit von I. I. Pjateckij-Šapiro [1] und W. L. Baily [2] behandelt. In der erstgenannten Arbeit, von der einige Ideen hier verwendet werden, findet sich auch der Nachweis dafür, daß $\Gamma_n(\mathsf{K})$ eine diskontinuierliche Gruppe der ersten Art ist, daß also insbesondere ihr Fundamentalbereich ein endliches Volumen $V_n(\mathsf{K})$ in der symplektischen Metrik besitzt. Hier soll die Aufgabe gelöst werden, den genauen Wert des Volumens zu bestimmen. Das ist wichtig wegen des bekannten Zusammenhangs mit der Eulerschen Charakteristik von $\mathfrak{H}_n$ modulo $\Gamma_n(\mathsf{K})$. Behandelt wurden bisher von C. L. Siegel die Spezialfälle $\Gamma_1(\mathsf{K})$ [3] und $\Gamma_n(\mathsf{P})$ [4]. Das erste Resultat, welches mittels einer Residuumsbestimmung erhalten wird, werden wir benutzen. Sodann liegt es nahe, zur Berechnung von $V_n(\mathsf{K})$ einen analogen Induktionsbeweis nach n zu führen wie bei der Berechnung von $V_n(\mathsf{P})$. Sieht man sich den Siegelschen Beweis daraufhin an, so scheint dies zunächst nur für Klassenzahl 1 durchführbar zu sein.

*) Erweiterte Fassung eines Vortrages, den ich im September 1960 auf dem Symposium über Zahlentheorie in Oberwolfach gehalten habe.

Das hat zwei Gründe. Erstens geht dies ein bei der Berechnung gewisser bestimmter Integrale und zweitens bei einem wichtigen Lemma (vgl. Hilfssatz 3) über die Vertauschung von Integrations- und Grenzprozessen. Hier soll nur etwas zu der zweiten Schwierigkeit gesagt werden. Im rationalen Fall reicht der Fundamentalbereich nicht an den Rand von $\mathfrak{H}_n$ heran, so daß man auf Grund des Majorantenkriteriums jene Vertauschung durchführen kann. Legt man den analogen Fundamentalbereich bei Zahlkörpern zugrunde, so stößt dieser jedoch an den Rand von $\mathfrak{H}_n$ heran, so daß man den Vertauschungssatz nicht beweisen kann. Es wird also darauf ankommen, zu zeigen, wie man die „Spitzen" (welche im rationalen Fall gar nicht auftreten) behandeln kann. Zu diesem Zweck hat man einen neuen Fundamentalbereich zu konstruieren, der für die Berechnung des Volumens geeignet ist und gleichzeitig den Beweis des Vertauschungssatzes gestattet. Das Ergebnis lautet

$$V_n(\mathsf{K}) = 2\pi^{-\frac{rn(n+1)}{2}} d^{n^2+\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n} ((k-1)!)^r \zeta_{\mathsf{K}}(2k),$$

wobei d die Diskriminante von K und $\zeta_{\mathsf{K}}(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion ist.

Es wäre von Interesse zu wissen, ob $V_n(\mathsf{K})$ bis auf einen rationalen Faktor eine Potenz von π ist. Dies erweist sich als richtig, wenn man obige Formel kombiniert mit einem Ergebnis von E. Hecke [7] über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion an geradzahligen Argumentstellen. Dann hebt sich die Irrationalität $\sqrt{d}$ heraus.

Es seien noch einige durchweg verwendete Bezeichnungen angeführt. Der Index ν laufe stets von 1 bis r. Tritt ν als oberer Index auf (z. B. $M^{(\nu)}$), so seien damit die im Sinne der Algebra konjugierten Größen bezeichnet, ν als unterer Index (z. B. Z_ν) bedeutet voneinander unabhängige Größen. Determinanten bzw. ihr absoluter Betrag werden mit det bzw. abs benannt. Aus der Theorie der quadratischen Formen übernehmen wir die Abkürzung $A[B] = B'AB$. Schließlich bedeute $\mathfrak{N}$ die Norm in K.

2. Wir behandeln zunächst symmetrische Matrizenpaare in K im Hinblick auf die Konstruktion von Fundamentalbereichen. Ein Paar n-reihiger Matrizen C, D aus K heiße symmetrisch, falls $CD' = DC'$ und der Rang $(C, D) = n$ ist. Man bekommt eine Klasseneinteilung der symmetrischen Matrizenpaare durch die folgende Äquivalenzrelation. Zwei symmetrische Paare C, D und C_1, D_1 sollen *äquivalent* heißen ($\sim$), wenn $C = PC_1$, $D = PD_1$ mit einer nicht-ausgearteten Matrix P aus K gilt. In jeder Klasse sind sicher ganze Paare (das sind solche, bei denen C, D ganz in K sind). Ein ganzes symmetrisches Paar heiße minimal, wenn

$$\mathfrak{N}(\delta(C, D)) = \operatorname*{Min}_{(C_1, D_1) \sim (C, D)} \mathfrak{N}(\delta(C_1, D_1))$$

ist, wobei δ den größten gemeinsamen Idealteiler der n-reihigen Minoren von (C, D) bezeichnet und nur ganze Paare C_1, D_1 zugelassen sind. Falls die Klassenzahl h von K eins ist, gilt für minimale Paare stets $\delta(C, D) = 1$; das sind die sogenannten teilerfremden symmetrischen Paare, welche als erste und zweite „Zeile" bei Modulmatrizen auftreten. Für $h > 1$ ist das nicht mehr richtig, so daß man zwangsläufig nicht-teilerfremde symmetrische Matrizenpaare behandeln muß. — Zwei minimale n-reihige Paare C, D und C_1, D_1 mögen *assoziiert* heißen, falls

$$(C_1, D_1) = (C, D)\, M, \quad M \in \Gamma_n(\mathsf{K})$$

gilt. Bekanntlich sind die teilerfremden symmetrischen Paare alle untereinander assoziiert. Allgemein gilt

Hilfssatz 1. *Die Anzahl nicht-assoziierter minimaler n-reihiger Paare ist endlich.*

Beweis. In [5], Hilfssatz 4 habe ich gezeigt, daß $\delta(C, D)$ für minimale symmetrische Matrizenpaare nur endlich vieler Werte fähig ist. Sei die Zahl q aus $\delta(C, D)$ fest gewählt; man ergänze C, D in K zu einer quadratischen Matrix

$$U = \begin{pmatrix} C & D \\ X_1 & X_2 \end{pmatrix}$$

der Determinante 1 mit ganzen qX_1, qX_2. Setzt man

$$U'^{-1} = \begin{pmatrix} X & -Y \\ * & * \end{pmatrix}, \quad F = Y - YX'C, \quad G = X - YX'D,$$

so erfüllt $M = \begin{pmatrix} C & D \\ F & G \end{pmatrix}$ die Gleichung $M'IM = I$, ist also eine symplektische Matrix, und $q^{2n}F$, $q^{2n}G$ sind ganz. Ersetzt man noch F und G durch $q^{2n}F$, $q^{2n}G$, so hat man $M'IM = q^{2n}I$ mit ganzem M. Nach einer Bezeichnungsweise von K. G. Ramanathan heißen reelle Matrizen M mit $M'IM = mI$ verallgemeinerte symplektische Matrizen mit dem Kern m. Man kann also jedes minimale Paar ergänzen zu einer ganzen verallgemeinerten symplektischen Matrix M mit einem Kern m aus einem endlichen Wertevorrat. Sind nun zwei solche Matrizen M_1, M_2 mit dem gleichen Kern m kongruent modulo m, so folgt $M_2^{-1}M_1 \equiv E \bmod 1$, also $M_2^{-1}M_1 \in \Gamma_n(\mathsf{K})$.

Man kann nun einen Fundamentalbereich für $\Gamma_n(\mathsf{K})$ ebenso wie im rationalen Fall durch die folgenden drei Bedingungen beschreiben:

$$\prod_{\nu=1}^{r} \operatorname{abs}(C^{(\nu)}Z_\nu + D^{(\nu)}) \geqq 1 \text{ für alle teilerfremden symmetrischen Paare } C, D \text{ in } \mathsf{K},$$

$$(Y_1^{-1}, \ldots, Y_r^{-1}) \in \mathfrak{R}, \quad X_\nu = \omega_1^{(\nu)}U_1 + \cdots + \omega_r^{(\nu)}U_r \qquad (\nu = 1, \ldots, r).$$

Dabei bezeichnet $\mathfrak{R}$ den Humbertschen reduzierten Bereich [6]; $\omega_1, \ldots, \omega_r$ ist eine Ganzheitsbasis von K, und die Elemente der reellen Matrizen $U_1, \ldots, U_r$ sollen dem Betrage nach $\leqq \frac{1}{2}$ sein. Die erste Bedingung besagt, daß $\prod_{\nu=1}^{r} \det Y_\nu$ maximal ist unter allen bezüglich der Modulgruppe äquivalenten Punkten. Sodann hat man noch eine Modulsubstitution der Form

$$W_\nu = Z_\nu[U^{(\nu)}] + S^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

mit unimodularem U und ganzem symmetrischen S frei. U wird durch die zweite Bedingung und schließlich S durch die letzte Bedingung festgelegt. Im Gegensatz zum rationalen Fall reicht dieser Fundamentalbereich für $h > 1$ an den Rand von $\mathfrak{H}_n$ heran und ist für die funktionentheoretischen Untersuchungen wenig geeignet.

Unter einer *Fundamentalmenge* versteht man eine Punktmenge in $\mathfrak{H}_n$, die zu jedem Punkt von $\mathfrak{H}_n$ mindestens einen bezüglich $\Gamma_n(\mathsf{K})$ äquivalenten enthält. Nun soll eine für die vorliegenden Zwecke geeignete Fundamentalmenge konstruiert werden. Zunächst sei für $t > 1$ im Raum von r positiv definiten symmetrischen Matrizen $(Y_1, \ldots, Y_r)$ die Punktmenge $\mathfrak{Q}(t)$ durch folgende Ungleichungen erklärt:

$$(1) \quad Y_\nu = P_\nu[Q_\nu], \quad P_\nu = \begin{pmatrix} p_1^{(\nu)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n^{(\nu)} \end{pmatrix}, \quad Q_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & q_{kl}^{(\nu)} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

$$(2) \quad 0 < p_k^{(\nu)} \leqq t p_{k+1}^{(\nu)} \quad (k < n), \qquad p_k^{(\nu)} \leqq t p_k^{(\mu)} \quad (k \leqq n), \qquad |q_{kl}^{(\nu)}| \leqq t.$$

Dabei laufen ν, μ unabhängig von 1 bis r. In (1) hat man die Jacobische Zerlegung einer symmetrischen Matrix in Diagonal- und Dreiecksmatrix und in (2) die Bedingungen für die Elemente von P und Q, bei denen ausnahmsweise die Indizes ν, μ inkonsequenterweise nach oben gesetzt sind.

Hilfssatz 2. $\Gamma_n(\mathsf{K})$ *besitzt eine Fundamentalmenge*

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{V \in \mathfrak{W}} V\langle \mathfrak{F}_{s,t} \rangle \qquad (s > 0,\ t > 1),$$

wobei $\mathfrak{W}$ *eine endliche Menge symplektischer Matrizen aus* K *ist und* $\mathfrak{F}_{s,t}$ *durch*

$$\prod_{\nu=1}^{r} \operatorname{abs}(C^{(\nu)} Z_\nu + D^{(\nu)}) \geqq s \text{ für alle ganzen symmetrischen Paare } C, D, \tag{3}$$

$$(Y_1, \ldots, Y_r) \in \mathfrak{Q}(t), \tag{4}$$

$$X_\nu = (x_{kl}^{(\nu)}), \quad |x_{kl}^{(\nu)}| \leqq t \qquad (\nu = 1, \ldots, r;\ k, l = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

erklärt ist.

Beweis. Für verallgemeinerte symplektische Matrizen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ aus K mit positivem Kern und $Z = (Z_1, \ldots, Z_r) \in \mathfrak{H}_n$ sei

$$\chi(M; Z) = \prod_{\nu=1}^{r} \operatorname{abs}(C^{(\nu)} Z_\nu + D^{(\nu)}).$$

Es gilt die Rechenregel

$$\chi(M M_1; Z) = \chi(M_1; Z)\, \chi(M; M_1\langle Z \rangle), \tag{6}$$

insbesondere also

$$\chi(M R; Z) = \chi(M; R\langle Z \rangle) \text{ für } R = \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \text{ mit unimodularem } U. \tag{7}$$

Sei nun $Z = (Z_1, \ldots, Z_r) \in \mathfrak{H}_n$ vorgegeben. Man bestimme das ganze symmetrische Paar C_0, D_0 so, daß

$$\chi(M_0; Z) = \operatorname*{Min}_{M} \chi(M; Z) \tag{8}$$

wird. Dabei sind alle verallgemeinerten ganzen symplektischen Matrizen M aus K mit positivem Kern zugelassen, und $M_0 = \begin{pmatrix} * & * \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$ ist eine Ergänzung von C_0, D_0 zu einer solchen Matrix. Dieses Minimum existiert auf Grund der absoluten Konvergenz der Eisensteinreihen [5] vom Typ

$$\sum \mathfrak{R}^g(\delta(C, D)) \prod_{\nu=1}^{r} \det{}^{-g}(C^{(\nu)} Z_\nu + D^{(\nu)}) \qquad (g > n + 1),$$

wobei über alle Klassen ganzer symmetrischer Paare C, D aus K summiert wird. Das minimale Paar C_0, D_0 gestattet nach Hilfssatz 1 die Darstellung

$$\begin{pmatrix} * & * \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} = W M_1$$

mit $M_1 \in \Gamma_n(\mathsf{K})$ und W aus einer festen endlichen Menge symplektischer Matrizen in K. Nun übe man auf $Z^* = W M_1 \langle Z \rangle$ noch eine symplektische Transformation TLR aus, wobei

$$T = \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} K' & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix},$$

U unimodular, K ganz, S ganz symmetrisch ist. Nach der Humbertschen Reduktionstheorie [6] kann man L aus einer festen endlichen Menge, R und T so wählen, daß für $\tilde{Z} = TLR\langle Z^*\rangle$ die Bedingungen (4) und (5) bei geeigneter von Z unabhängiger Wahl von t erfüllt sind. Ferner existiert dann eine feste natürliche Zahl c, so daß stets $cTLRWM_1$ eine ganze verallgemeinerte symplektische Matrix mit dem Kern c ist. Nach einer beim Beweis von Hilfssatz 1 gemachten Bemerkung über verallgemeinerte symplektische Matrizen mit festem Kern folgt

$$TLRWM_1 = V^{-1} M_2$$

mit $M_2 \in \Gamma_n(\mathsf{K})$ und V aus einer festen endlichen Menge $\mathfrak{W}$ symplektischer Matrizen in K. — Der Beweis ist vollendet, falls noch (3) für $\tilde{Z}$ nachgewiesen werden kann. Diese Bedingung gilt auf Grund von (8) zunächst für Z^*, wenn man die Rechenregel (6) benutzt:

$$\chi(M; Z^*) = \chi(M; WM_1\langle Z\rangle) = \frac{\chi(cMWM_1; Z)}{\chi(cWM_1; Z)} \geqq c^{-nr}.$$

Daran ändert sich nach (7) nichts beim Übergang zu $R\langle Z^*\rangle$. Übt man noch L und dann T aus, so gelangt man zu $\tilde{Z}$ und hat evtl. gleichzeitig die rechte Seite c^{-nr} durch eine kleinere von Z unabhängige positive Größe zu ersetzen. Das ist möglich, weil L einer von Z unabhängigen endlichen Menge angehört.

3. Sei $f(x)$ als monoton fallende stetige Funktion von x vermöge

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(rn+1)!}{((n-1)!)^r}(1-x) & \text{für } 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{für } x \geqq 1 \end{cases} \tag{9}$$

erklärt. Durch

$$S_\nu = \begin{pmatrix} Y_\nu^{-1} & 0 \\ 0 & Y_\nu \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & -X_\nu \\ 0 & E \end{pmatrix}\right] \tag{10}$$

wird bekanntlich (vgl. [4]) die Z_ν-Halbebene auf den Raum der $2n$-reihigen symmetrischen positiv definiten symplektischen Matrizen S_ν abgebildet. Die Modulsubstitution $Z_\nu \to M^{(\nu)}\langle Z_\nu\rangle$ induziert dabei die Abbildung $S_\nu \to S_\nu[M^{(\nu)-1}]$. Nun seien $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ positive reelle Zahlen, $(Z_1, \ldots, Z_r) \in \mathfrak{H}_n$. Man bilde

$$\Phi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r; Z_1, \ldots, Z_r) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)^{2n} \sum_{\mathfrak{w} \neq 0} f\left(\sum_{\nu=1}^{r} S_\nu[\varepsilon_\nu \mathfrak{w}^{(\nu)}]\right), \tag{11}$$

wobei über alle ganzen $2n$-zeiligen Spalten $\mathfrak{w} \neq 0$ aus K summiert wird. Das symplektische Volumelement lautet

$$dv = \prod_{\nu=1}^{r} \{dX_\nu\}\{dY_\nu^{-1}\}.$$

Dabei bedeutet allgemein $\{dA\}$ das Produkt der Differentiale der unabhängigen Elemente einer Matrix A. Ziel dieses Abschnitts ist der folgende Majorantensatz.

Hilfssatz 3. *Es gibt eine von $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ unabhängige integrierbare Funktion $g(Z_1, \ldots, Z_r)$, so daß*

$$\Phi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r; Z_1, \ldots, Z_r) \leqq g(Z_1, \ldots, Z_r)$$

und

$$\int_{\mathfrak{F}} g\,dv < \infty$$

ist. Dabei hat man die ε_ν auf eine hinreichend kleine Umgebung des Nullpunktes zu beschränken, und $\mathfrak{F}$ ist die in Hilfssatz 2 beschriebene Fundamentalmenge.

Beweis. Da $\mathfrak{F}$ sich aus den endlich vielen Bereichen $V\langle\mathfrak{F}_{s,t}\rangle$ zusammensetzt, betrachte man zunächst die Punkte $Z \in \mathfrak{F}_{s,t}$. Setzt man in (3) speziell

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

so findet man

$$\prod_{\nu=1}^{r} | a^{(\nu)} z_\nu + b^{(\nu)} | \geqq s \tag{12}$$

für alle Paare ganzer Zahlen $(a, b) \neq (0, 0)$ aus K. Dabei ist z_ν das erste Diagonalelement von Z_ν. Man zerlege a, b nach einer Ganzheitsbasis in K und betrachte bei festem Z die Linearformen in diesen Komponenten von a, b

$$L_\nu = a^{(\nu)} z_\nu + b^{(\nu)}, \quad L_{\nu+r} = a^{(\nu)} \bar{z}_\nu + b^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, \ldots, r).$$

Diese sind paarweise konjugiert komplex und haben die Determinante $2^r dy_1 \cdots y_r$. Dabei ist y_ν der Imaginärteil von z_ν. Der Minkowskische Linearformensatz zeigt wegen (12), daß diese Determinante nicht beliebig klein werden kann; d. h. es gibt eine positive von Z unabhängige Konstante λ mit

$$\prod_{\nu=1}^{r} y_\nu > \lambda \qquad (Z \in \mathfrak{F}_{s,t}).$$

Nun benutze man die Jacobische Darstellung (1) von Y_ν und (2), (4).

Dies zeigt, daß

$$p_k^{(\nu)-1} < \varkappa \qquad (k = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, r) \tag{13}$$

ist mit einer von Z unabhängigen positiven Konstanten $\varkappa$. Das bedeutet, daß $\mathfrak{F}_{s,t}$ nicht an den Rand von $\mathfrak{H}_n$ heranreicht.

Für positive $\varrho_1, \ldots, \varrho_r$ wollen wir nun die Anzahl $h(\varrho_1, \ldots, \varrho_r; Z_1, \ldots, Z_r)$ der in K ganzen Lösungsspalten $\mathfrak{w}$ von

$$S_\nu[\mathfrak{w}^{(\nu)}] \leqq \varrho_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

abschätzen. Setzt man $\mathfrak{w}' = (\mathfrak{u}', \mathfrak{v}')$ und führt (10) ein, so lautet dieses Ungleichungssystem

$$Y_\nu^{-1}[\mathfrak{u}^{(\nu)} - X_\nu \mathfrak{v}^{(\nu)}] + Y_\nu[\mathfrak{v}^{(\nu)}] \leqq \varrho_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, r).$$

Die in Frage stehende Lösungszahl wird majorisiert, indem man stattdessen nur

$$Y_\nu^{-1}[\mathfrak{u}^{(\nu)} - X_\nu \mathfrak{v}^{(\nu)}] \leqq \varrho_\nu, \quad Y_\nu[\mathfrak{v}^{(\nu)}] \leqq \varrho_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

verlangt. Bei Benutzung der Jacobischen Darstellung $Y_\nu = P_\nu[Q_\nu]$ aus (1) und $\mathfrak{r}^{(\nu)} = X_\nu \mathfrak{v}^{(\nu)}$, $Q_\nu'^{-1} = (q_{kl}^{*(\nu)})$, $\mathfrak{u}' = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathfrak{r}' = (r_1, \ldots, r_n)$ reduziert sich dies auf

$$\left| u_k^{(\nu)} - r_k^{(\nu)} + \sum_{l=1}^{k-1} q_{kl}^{*(\nu)} (u_l^{(\nu)} - r_l^{(\nu)}) \right| \leqq \varrho_\nu^{\frac{1}{2}} p_k^{(\nu)\frac{1}{2}}, \quad \left| v_k^{(\nu)} + \sum_{l=k+1}^{n} q_{kl}^{(\nu)} v_l^{(\nu)} \right| \leqq \varrho_\nu^{\frac{1}{2}} p_k^{(\nu)-\frac{1}{2}}.$$

Führt man noch eine Ganzheitsbasis für die gesuchten Lösungen $u_k^{(\nu)}$, $v_k^{(\nu)}$, $r_k^{(\nu)}$ ein, so zeigt eine einfache Gitterpunktabzählung

$$h(\varrho_1, \ldots, \varrho_r; Z_1, \ldots, Z_r) \leqq \frac{1}{d^n} \prod_{\substack{\nu=1,\ldots,r \\ k=1,\ldots,n}} (\gamma^2 + 2\gamma \varrho_\nu^{\frac{1}{2}} (p_k^{(\nu)\frac{1}{2}} + p_k^{(\nu)-\frac{1}{2}}) + 4\varrho_\nu) \tag{14}$$

mit einer nur von K und n abhängigen Konstanten γ.

Nun ist nach (10), (11) für $Z \in \mathfrak{F}_{s,t}$:

$$\Phi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r;\ V^{(1)}\langle Z_1\rangle, \ldots, V^{(r)}\langle Z_r\rangle) \leqq (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)^{2n} \sum_{\mathfrak{w} \neq 0} f\left(\sum_{\nu=1}^{r} \varepsilon_\nu^2 S_\nu[V^{(\nu)-1}\mathfrak{w}^{(\nu)}]\right)$$

$$\leqq (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)^{2n} f(0)\, h\left(\frac{1}{\varepsilon_1^2}, \ldots, \frac{1}{\varepsilon_r^2};\ V^{(1)}\langle Z_1\rangle, \ldots, V^{(r)}\langle Z_r\rangle\right).$$

Man bestimme die natürliche Zahl m so, daß mV^{-1} ganz ist; dann zeigt (14)

$$\Phi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r;\ V^{(1)}\langle Z_1\rangle, \ldots, V^{(r)}\langle Z_r\rangle) \leqq (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)^{2n} f(0)\, h\left(\frac{m^2}{\varepsilon_1^2}, \ldots, \frac{m^2}{\varepsilon_r^2};\ Z_1, \ldots, Z_r\right)$$

$$\leqq (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)^{2n} f(0)\, d^{-n} \prod_{\substack{\nu=1\cdots r\\ k=1\cdots n}} \left(\gamma^2 + \frac{2\gamma m}{\varepsilon_\nu}\left(p_k^{(\nu)\frac{1}{2}} + p_k^{(\nu)-\frac{1}{2}}\right) + 4\frac{m^2}{\varepsilon_\nu^2}\right).$$

Wenn man noch die ε_ν auf eine hinreichend kleine Umgebung des Nullpunktes beschränkt und (13) benutzt, lassen sich die Faktoren des obigen Produktes bis auf einen konstanten Faktor durch

$$\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_\nu}\right)^2 p^{(\nu)\frac{1}{2}}$$

majorisieren. Also ist

$$\Phi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r;\ V^{(1)}\langle Z_1\rangle, \ldots, V^{(r)}\langle Z_r\rangle)$$

$$\leqq \beta(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)^{2n} f(0)\, d^{-n}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)^{2n} \cdots \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)^{2n} \prod_{\nu=1}^{r} \det P_\nu^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \alpha \prod_{\nu=1}^{r} \det P_\nu^{\frac{1}{2}} = g(V^{(1)}\langle Z_1\rangle, \ldots, V^{(r)}\langle Z_r\rangle)$$

mit geeigneten Konstanten α, β. Damit ist eine Majorante in $V\langle\mathfrak{F}_{s,t}\rangle$ gefunden, was ausreichend ist, da $\mathfrak{F}$ sich aus endlich vielen solchen Bereichen zusammensetzt. — Schließlich ergibt sich die Konvergenz von

$$\int g\, dv$$

folgendermaßen. An Stelle von Y_ν^{-1} nehme man als neue Integrationsvariable $p^{(\nu)-\frac{1}{2}}, q_{kl}^{*(\nu)}$. Die Funktionaldeterminante hat den Wert

$$2^n \prod_{k,\nu} p_k^{(\nu)-(k-\frac{1}{2})}.$$

Folglich ist

$$\int_{V\langle\mathfrak{F}_{s,t}\rangle} g\, dv = \alpha \int_{\mathfrak{F}_{s,t}} \prod_{\nu=1}^{r} \det P_\nu^{\frac{1}{2}} dv = 2^n \alpha \int \prod_{k,\nu} p_k^{(\nu)-(k-1)} \prod_{\nu=1}^{r} \{dX_\nu\}\{dQ_\nu^{-1}\}\{dP_\nu^{-\frac{1}{2}}\}$$

konvergent, da rechts Integrand und Integrationsbereich nach (2), (5) und (13) beschränkt bleiben.

4. Es seien $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_h$ die Idealklassen von K; man fasse in (11) zunächst alle Reihenglieder zusammen, für welche der größte gemeinsame Idealteiler $\delta(\mathfrak{w})$ der Elemente von $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{J}_k$ liegt:

$$\Phi_k(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r;\ Z_1, \ldots, Z_r) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)^{2n} \sum_{\delta(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{J}_k} f\left(\sum_{\nu=1}^{r} \varepsilon_\nu^2 S_\nu[\mathfrak{w}^{(\nu)}]\right).$$

Es sei F ein in $\mathfrak{F}$ gelegener Fundamentalbereich von $\Gamma_n(\mathsf{K})$. Nach Hilfssatz 3 existieren dann die Integrale

$$\psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r;\ \mathfrak{J}_k) = \int_F \Phi_k(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r;\ Z_1, \ldots, Z_r)\, dv \qquad (k = 1, \ldots, h), \tag{15}$$

und es wird

$$(16)\qquad \psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) = \sum_{k=1}^{h} \psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r; \mathfrak{J}_k) = \int_F \Phi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r; Z_1, \ldots, Z_r)\, dv.$$

Nun wird $\psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ durch $V_n(\mathsf{K})$ und $\psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r; \mathfrak{J}_k)$ durch $V_{n-1}(\mathsf{K})$ ausgedrückt. Dann ergibt (16) eine Rekursionsformel für $V_n(\mathsf{K})$.

Auf Grund von Hilfssatz 3 kann man in (16) den Grenzübergang

$$(17)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \psi(\varepsilon, \ldots, \varepsilon) = \int_F \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r; Z_1, \ldots, Z_r)\right) dv$$

unter dem Integralzeichen vollziehen. Man spalte $\mathfrak{w}$ nach einer Ganzheitsbasis $\omega_1, \ldots, \omega_r$ auf, so daß $\sum_{\nu=1}^{r} S_\nu[\mathfrak{w}^{(\nu)}] = S[W\mathfrak{x}]$ wird; wobei also S aus den Kästchen $S_1, \ldots, S_r$ in der Hauptdiagonale aufgebaut ist, die Spalte $\mathfrak{x}$ aus den $2nr$ ganz-rationalen Komponenten der Elemente von $\mathfrak{w}$ besteht und W in naheliegender Weise aus den Basiselementen zusammengesetzt ist. Auf Grund der Bedeutung des Riemannschen Integrals ist dann

$$(18)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \Phi(\varepsilon, \ldots, \varepsilon; Z_1, \ldots, Z_r) = \int_{S[W\mathfrak{x}]\leq 1} f(S[W\mathfrak{x}])\, \{d\mathfrak{x}\}.$$

Durch $S[W\mathfrak{x}] \leqq a$ wird ein $2nr$-dimensionales Ellipsoid beschrieben mit dem Volumen

$$B(a) = \frac{\pi^{nr} a^{nr}}{d^n (nr)!}.$$

Folglich zeigt die Berechnung des Integrals (18), daß

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi(\varepsilon, \ldots, \varepsilon; Z_1, \ldots, Z_r) = \int_0^1 f(x) \frac{dB(x)}{dx}\, dx = \frac{\pi^{nr}}{d^n ((n-1)!)^r}$$

ist, und mit (17) wird

$$(19)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \psi(\varepsilon, \ldots, \varepsilon) = \frac{\pi^{nr} V_n(\mathsf{K})}{d^n ((n-1)!)^r}.$$

Zur Herstellung des angekündigten Zusammenhangs zwischen $\psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r; \mathfrak{J}_k)$ und $V_{n-1}(\mathsf{K})$ benötigen wir zunächst einige Vorbereitungen.

Hilfssatz 4. *Zwei ganze Spalten $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2$ von je $2n$ Elementen lassen sich genau dann mittels einer Modulsubstitution ineinander überführen, $\mathfrak{w}_1 = M\mathfrak{w}_2$, wenn $\delta(\mathfrak{w}_1) = \delta(\mathfrak{w}_2)$ ist.*

Beweis. Man benötigt zwei Hilfsmittel. Erstens die Richtigkeit des Satzes für eine beliebige unimodulare Matrix U statt M und zweitens die folgende arithmetische Aussage. Sind a, b ganze Zahlen und ξ ein ganzes Ideal von K, so gibt es eine ganze Zahl $x \in \mathsf{K}$ mit $(a + xb, \xi) = (a, b, \xi)$. — Geht man nun von einer beliebigen ganzen Spalte $\mathfrak{w}$ mit den Elementen $w_1, \ldots, w_{2n}$ aus, so kann man diese infolgedessen bei Verwendung von Modulsubstitutionen der speziellen Gestalt

$$\begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & 0 \\ S & E \end{pmatrix},$$

U unimodular, S ganz symmetrisch, zunächst überführen in eine solche, für welche höchstens die Elemente $w_1, w_2, w_{n+1}, w_{n+2}$ von Null verschieden sind. Daher kann man sich auf den Fall $n = 2$ beschränken. Darüber hinaus kann man sogar mittels obiger Modulsubstitutionen erreichen, daß $\mathfrak{w}' = (w_1, w_2, gw_2, 0)$ und $w_1 = \alpha\alpha^*$, $w_2 = \alpha^h$ ist mit einer ganzen Zahl g und zueinander teilerfremden ganzen Idealen α, α^*. Transformiert man nun $\mathfrak{w}$ mit

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ S & E \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & xw_2 \\ xw_2 & -xw_1 \end{pmatrix},$$

so wird g durch $xw_2 + g$ ersetzt. Man bestimme x aus der Kongruenz $xw_2 + g \equiv 0 \bmod \alpha^*$. Dann wird das dritte Element von $\mathfrak{w}$ kongruent Null modulo w_1, also $\mathfrak{w}' = (w_1, w_2, tw, 0)$ mit einer ganzen Zahl t. Schließlich führt die Modulsubstitution

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ T & E \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{w}$ über in $(w_1, w_2, 0, 0)$. Folglich kann man alle ganzen Spalten $\mathfrak{w}$ mit gegebenem größten gemeinsamen Teiler $\delta(\mathfrak{w})$ mittels einer Modulsubstitution auf die gleiche Normalform bringen, womit der Beweis des Hilfssatzes erbracht ist.

Für ganze $2n$-zeilige Spalten $\mathfrak{w} \neq 0$ aus K definiere man die Untergruppe

$$\Delta_{\mathfrak{w}} = \{M \in \Gamma_n(\mathsf{K}) \mid M\mathfrak{w} = \mathfrak{w}\}$$

von $\Gamma_n(\mathsf{K})$. Diese steht in dem folgenden Zusammenhang zu $\Gamma_{n-1}(\mathsf{K})$.

Hilfssatz 5. *$\Delta_{\mathfrak{w}}$ ist konjugiert über der symplektischen Gruppe in K zu*

$$M^{*-1}\Delta_{\mathfrak{w}} M^* = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & T \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \in \Gamma_{n-1}(\mathsf{K}); \; T = \begin{pmatrix} t & \mathfrak{t}' \\ \mathfrak{t} & 0 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{a} & E \end{pmatrix}, \; \begin{matrix} \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{t} \equiv 0 \bmod \delta^{-1}(\mathfrak{w}) \\ t \equiv 0 \bmod \delta^{-2}(\mathfrak{w}) \end{matrix} \right\}.$$

Beweis. Es seien p, q zwei erzeugende Zahlen des Ideals $\delta(\mathfrak{w}) = (p, q)$ und $\mathfrak{w}_0' = (p, 0, \ldots, 0, q, 0, \ldots, 0)$. Nach Hilfssatz 4 gibt es eine Modulsubstitution M_0 mit $M_0^{-1}\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_0$. Dann ist

$$M_0^{-1}\Delta_{\mathfrak{w}} M_0 = \Delta_{\mathfrak{w}_0}.$$

Man bestimme $x, y \in \delta^{-1}(\mathfrak{w})$ so, daß $xp + yq = 1$ wird, und setze

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C_1 = \begin{pmatrix} -q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Dann wird $M_1^{-1}\mathfrak{w}_0$ die Einheitsspalte $\mathfrak{e}$, und $M_1^{-1}\Delta_{\mathfrak{w}_0} M_1$ besteht aus symplektischen Matrizen mit der ersten Spalte $\mathfrak{e}$. Nun zeigt eine leichte Rechnung, daß die Ganzheitsforderung in $\Delta_{\mathfrak{w}_0}$ gerade die arithmetische Eigenschaft des Hilfssatzes für $M_1^{-1}\Delta_{\mathfrak{w}_0} M_1$ zur Folge hat, so daß die Behauptung mit der symplektischen Matrix $M^* = M_0 M_1$ ersichtlich wird.

Man wähle zu jeder Idealklasse $\mathfrak{J}_k$ eine fortan feste ganze Spalte $\mathfrak{w}_k$ mit $\delta(\mathfrak{w}_k) \in \mathfrak{J}_k$. Dann lautet die Restklassenzerlegung von $\Gamma_n(\mathsf{K})$ modulo $\Delta_{\mathfrak{w}_k}$

$$\Gamma_n(\mathsf{K}) = \sum_{\delta(\mathfrak{w}) = \delta(\mathfrak{w}_k)} M_{\mathfrak{w}} \Delta_{\mathfrak{w}_k}.$$

Die $M_{\mathfrak{w}}$ sind dabei irgendwelche nach Hilfssatz 4 stets vorhandene Modulmatrizen, die $M_{\mathfrak{w}}\mathfrak{w}_k = \mathfrak{w}$ erfüllen. Sie seien noch so gewählt, daß $M_{-\mathfrak{w}} = -M_{\mathfrak{w}}$ ist. Dann ist

$$F(\Delta_{\mathfrak{w}_k}) = \bigcup_{\delta(\mathfrak{w}) = \delta(\mathfrak{w}_k)} M_{\mathfrak{w}}^{-1}\langle F \rangle$$

ein doppelt belegter Fundamentalbereich von $\Delta_{\mathfrak{w}_k}$. Folglich bekommt man

$$\sum_{\delta(\mathfrak{w}) = \delta(\mathfrak{w}_k)} \int_F f\left(\sum_{\nu=1}^{r} \varepsilon_\nu^2 S_\nu[\mathfrak{w}^{(\nu)}]\right) dv = \int_{F(\Delta_{\mathfrak{w}_k})} f\left(\sum_{\nu=1}^{r} \varepsilon_\nu^2 S_\nu[\mathfrak{w}_k^{(\nu)}]\right) dv$$

$$= 2 \int_{F(\Delta_k)} f(\varepsilon_1^2 s_1 + \cdots + \varepsilon_r^2 s_r)\, dv,$$

wobei $\Delta_k = M_k^{*-1}\Delta_{\mathfrak{w}_k} M_k^*$ die Gruppe aus Hilfssatz 5, $F(\Delta_k)$ ihr Fundamentalbereich und s_i das erste Diagonalelement von S_i $(i = 1, \ldots, r)$ ist. Durchläuft nun g alle nicht-

assoziierten Zahlen aus K mit ganzem $g\mathfrak{w}_k$ und $\mathfrak{w}$ alle ganzen Spalten mit $\delta(\mathfrak{w}) = \delta(\mathfrak{w}_k)$, so werden durch $g\mathfrak{w}$ genau alle ganzen Spalten geliefert, für die der größte gemeinsame Idealteiler ihrer Elemente in der Klasse $\mathfrak{J}_k$ liegt. Obige Formel zeigt daher für $\psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r; \mathfrak{J}_k)$ aus (15)

$$(20) \quad \psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r; \mathfrak{J}_k) = 2(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)^{2n} \sum_g \int_{F(\Delta_k)} f((\varepsilon_1 g^{(1)})^2 s_1 + \cdots + (\varepsilon_r g^{(r)})^2 s_r)\, dv.$$

Das rechts stehende Integral ist unabhängig von der speziellen Wahl eines Fundamentalbereichs, da $s_1, \ldots, s_r$ gegenüber Δ_k invariant sind. Nun lege man einen neuen Fundamentalbereich für Δ_k zugrunde, der die Berechnung des Integrals erlaubt. Nach Hilfssatz 5 lautet die Restklassenzerlegung von Δ_k modulo $\Gamma_{n-1}(\mathsf{K})$

$$(21) \qquad \Delta_k = \sum M_0 \Gamma_{n-1}(\mathsf{K}),$$

wobei M_0 über alle Matrizen

$$M_0 = \begin{pmatrix} U' & TU^{-1} \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{a} & E \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} t & \mathfrak{t}' \\ \mathfrak{t} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{t} \equiv 0 \bmod \delta^{-1}(\mathfrak{w}_k) \\ t \equiv 0 \bmod \delta^{-2}(\mathfrak{w}_k) \end{matrix}$$

läuft. Man wähle die Diskriminantenmatrizen ω bzw. ω^* einer Basis von $\delta^{-1}(\mathfrak{w}_k)$ bzw. $\delta^{-2}(\mathfrak{w}_k)$ und setze

$$Z_\nu = \begin{pmatrix} z_\nu & \mathfrak{z}'_\nu \\ \mathfrak{z}_\nu & \mathfrak{Z}_\nu \end{pmatrix}, \quad Y_\nu^{-1} = \begin{pmatrix} y_{\nu 1} \cdots y_{\nu n} \\ * \end{pmatrix}, \quad X_\nu = \begin{pmatrix} x_{\nu 1} \cdots x_{\nu n} \\ * \end{pmatrix}, \quad (\nu = 1, \ldots, r)$$

$$\left(\frac{y_{1k}}{y_{11}} \cdots \frac{y_{rk}}{y_{r1}}\right) = (\eta_{1k} \cdots \eta_{rk})\, \omega, \quad (x_{1k} \cdots x_{rk}) = (\xi_{1k} \cdots \xi_{rk})\, \omega, \quad (k = 2, \ldots, n)$$

$$(x_{11} \cdots x_{r1}) = (\xi_{11} \cdots \xi_{r1})\, \omega^*.$$

Auf Grund der Zerlegung (21) kann dann ein neuer Fundamentalbereich F_k von Δ_k festgelegt werden durch die Bedingungen

$$(22) \quad (\mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_r) \in F_0, \ |\eta_{\nu\mu}| \leqq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu = 1, \ldots, r \\ \mu = 2, \ldots, n \end{pmatrix}, \ \eta_{12} \geqq 0, \ |\xi_{\nu\mu}| \leqq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu = 1, \ldots, r \\ \mu = 1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Dabei ist F_0 irgendein Fundamentalbereich von $\Gamma_{n-1}(\mathsf{K})$. Bezeichnet man mit dv_0 das symplektische Volumelement im Raume der $(\mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_r)$, so drückt sich dv in den neuen Koordinaten aus durch

$$dv = d^{n-1} \mathfrak{N}^{-2n}(\delta(\mathfrak{w}_k))\, (s_1 \cdots s_r)^{n-1} dv_0 \prod_\nu ds_\nu \prod_{\nu,\mu} d\eta_{\nu\mu} \prod_{\nu,\mu} d\xi_{\nu\mu}.$$

Nun läßt sich das Integral in (20) leicht berechnen auf Grund der einfachen Bedingungen (22):

$$(23) \qquad \int_{F_k} f\left(\sum_{\nu=1}^{r} (\varepsilon_\nu g^{(\nu)})^2 s_\nu\right) dv$$

$$= \tfrac{1}{2} V_{n-1}(\mathsf{K})\, d^{n-1} \mathfrak{N}^{-2n}(\delta(\mathfrak{w}_k)) \int_0^\infty (s_1 \cdots s_r)^{n-1} f\left(\sum_{\nu=1}^{r} (\varepsilon_\nu g^{(\nu)})^2 s_\nu\right) ds_1 \cdots ds_r$$

$$= \tfrac{1}{2} V_{n-1}(\mathsf{K})\, d^{n-1} \mathfrak{N}^{-2n}(\delta(g\mathfrak{w}_k))\, (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)^{-2n} \int_0^\infty (x_1 \cdots x_r)^{n-1} f(x_1 + \cdots + x_r)\, dx_1 \cdots dx_r.$$

Zur Berechnung des verbleibenden Integrals gehe man von

$$I_l(a, b) = \int_{\substack{x_1 + \cdots + x_l \leq 1 \\ x_1, \ldots, x_l \geq 0}} (x_1 \cdots x_l)^a (1 - x_1 - \cdots - x_l)^b\, dx_1 \cdots dx_l$$

für nicht-negative ganz-rationale a, b aus. Man verifiziert leicht die Rekursionsformel

$$I_l(a, b) = \frac{a!\, b!}{(a + b + 1)!} I_{l-1}(a, b + a + 1),$$

woraus sich

$$I_l(a, b) = \frac{(a!)^l\, b!}{(l(n+1)+b)!}$$

ergibt. Bei der Definition (9) von $f(x)$ erhält man

$$\int_0^\infty (x_1 \cdots x_r)^{n-1} f(x_1 + \cdots + x_r)\, dx_1 \cdots dx_r = \frac{(rn+1)!}{((n-1)!)^r}\, I_r(n-1, 1) = 1.$$

Schließlich setze man den Wert (23) in (20) ein und bekommt

$$\psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r; \mathfrak{J}_k) = V_{n-1}(\mathsf{K})\, d^{n-\frac{1}{2}} \mathfrak{N}^{-2n}(\delta(\mathfrak{w}_k)) \sum_g \mathfrak{N}^{-2n}(g).$$

Beachtet man noch die Summationsvorschrift für g, daß nämlich $\alpha = g\delta(\mathfrak{w}_k)$ genau über alle ganzen Ideale aus $\mathfrak{J}_k$ läuft, so folgt

$$\psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r; \mathfrak{J}_k) = V_{n-1}(\mathsf{K})\, d^{n-\frac{1}{2}} \sum_{\alpha \in \mathfrak{J}_k} \mathfrak{N}^{-2n}(\alpha).$$

Die Summation über die Idealklassen zeigt nach (16)

$$\psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) = V_{n-1}(\mathsf{K})\, d^{n-\frac{1}{2}} \zeta_{\mathsf{K}}(2n).$$

Kombiniert man dieses Resultat mit (19), so folgt die Rekursionsformel

$$V_n(\mathsf{K}) = \pi^{-nr}((n-1)!)^r\, d^{2n-\frac{1}{2}} \zeta_{\mathsf{K}}(2n)\, V_{n-1}(\mathsf{K}),$$

woraus sich mit dem Siegelschen Ergebnis für $n = 1$,

$$V_1(\mathsf{K}) = 2\pi^{-r} d^{1/2} \zeta_{\mathsf{K}}(2),$$

die gewünschte Formel für $V_n(\mathsf{K})$ ergibt.

Literatur.

[1] *I. I. Pjateckij-Šapiro*, Singuläre Modulfunktionen, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **20** (1956), 53—98 (russisch).

[2] *W. L. Baily*, On the Hilbert-Siegel Modular Space, American J. of Mathem. **81** (1959), 846—874.

[3] *C. L. Siegel*, The Volume of the fundamental Domain for some infinite Groups, Transactions of the American Mathem. Soc. **39** (1936), 209—218.

[4] *C. L. Siegel*, Symplectic Geometry, American J. of Mathem. **65** (1943), 1—86.

[5] *H. Klingen*, Eisensteinreihen zur Hilbertschen Modulgruppe *n*-ten Grades, Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen **1960** (4), 87—104.

[6] *P. Humbert*, Théorie de la réduction des formes quadratiques définies positives dans un corps algébrique *K* fini, Comm. Math. Helv. **12** (1939/40), 263—306.

[7] *E. Hecke*, Analytische Funktionen und algebraische Zahlen. II, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **3** (1924), 213—236.

Eingegangen 4. Oktober 1960.

Eine Mordell'sche Methode in der Geometrie der Zahlen.

Von *C. G. Lekkerkerker* in Amsterdam.

1. Wie Mordell [5] gezeigt hat, führt eine von Hermite [1] bei der Abschätzung des arithmetischen Minimums einer positiven quadratischen Form benutzte Methode zu der folgenden Ungleichung für die Hermite'sche Konstante γ_n:

$$\gamma_n \leqq \gamma_{n-1}^{(n-1)/(n-2)}. \tag{1}$$

In der Geometrie der Zahlen ist diese Methode auf eine Menge anderer Distanzfunktionen angewandt worden, besonders von Mordell [2, 3, 4, 5, 6], aber auch von Oppenheim [7, 8, 9], Mullender [10] und Armitage [11]. Dabei wird stets eine Beziehung vom Typ (1) zwischen den Minima einer Funktion in n Veränderlichen und einer damit zusammenhängenden Funktion in $n-1$ Veränderlichen hergeleitet. Meistens besitzen die zugehörigen Sternkörper eine große Gruppe von Automorphismen.

Bis jetzt liegt noch kein allgemeiner Satz vor, woraus man durch einfache Anwendung die Resultate der oben genannten Autoren erhält. Zwar hat Armitage [11] versucht, einen solchen Satz aufzustellen, aber seine diesbezügliche Aussage ist zu spezieller Art und außerdem nicht ohne weiteres richtig[1]). Ziel dieser Arbeit ist nun, einen Satz oder eigentlich zwei Sätze, von denen der zweite sich auf Sternkörper ohne Automorphismen bezieht, zu beweisen, die von der gewünschten Beschaffenheit sind. Diese Sätze sind dann als Verallgemeinerungen der Beziehung (1) anzusehen.

2. Im folgenden werden die folgenden Bezeichnungen benutzt: x, y, z, a, b, x^1, x^2, usw.: Punkte des Raumes R_n, auch betrachtet als Vektoren, insbesondere o der Nullpunkt;

$|x|$: Länge des Vektors x;

$x \cdot y$: inneres Produkt zweier Vektoren x, y;

H: $(n-1)$-dimensionaler, linearer Unterraum von R_n;

$H_z (z \neq o)$: der Unterraum H, der senkrecht auf z steht;

$u, u^1, u^2, \ldots$: Punkte mit ganzen Koordinaten;

Y: das Gitter der Punkte mit ganzen Koordinaten;

Λ: Gitter $A\mathsf{Y}$ (A eine beliebige nicht-singuläre Transformation des Raumes);

$F(x)$: Distanzfunktion, d. h. eine nichtnegative, stetige Funktion mit $F(\tau x) = |\tau| F(x)$ (τ reell, $x \in R_n$); die Punktmenge $S = \{x \mid F(x) \leqq 1\}$ ist ein *Sternkörper*.

Die Determinante eines Gitters $\Lambda = A\mathsf{Y}$ wird gegeben durch $d(\Lambda) = |\det A|$, während die Spalten von A, sagen wir $a^1, a^2, \ldots, a^n$, eine Basis von Λ bilden; wir sprechen einfach von der Basis $A = \{a^1, a^2, \ldots, a^n\}$. Wir brauchen weiter die folgenden Begriffe:

[1]) Es fehlt eine Bedingung der Form 2^a (s. Bemerkung 2).

Polares Gitter Λ^* zu einem Gitter $\Lambda = AY$: das Gitter $\Lambda^* = A^*Y$, wo A^* die zu A transponiert inverse Matrix bedeutet; es besteht aus den Punkten y, für die $x \cdot y =$ ganze Zahl gilt für alle $x \in \Lambda$.

Minimum eines Sternkörpers S (oder der zugehörigen Distanzfunktion F) in bezug auf ein Gitter Λ:

$$\lambda(S, \Lambda) = \lambda(F, \Lambda) = \inf_{x \in \Lambda,\, x \neq o} F(x). \tag{2}$$

Absolutes Minimum von S (oder F):

$$\lambda(S) = \lambda(F) = \sup_{d(\Lambda)=1} \lambda(F, \Lambda) = \sup_{\Lambda} \lambda(F, \Lambda)\, d(\Lambda)^{-1/n}. \tag{3}$$

S wird ein Sternkörper endlichen Typs oder unendlichen Typs genannt, je nachdem $\lambda(S) > 0$ oder $\lambda(S) = 0$ ist. Für begrenzte Sternkörper ist immer $\lambda(S) > 0$.

Automorphismus Ω eines Sternkörpers S: lineare Transformation Ω des Raumes, für welche $\Omega S = S$ ist; ist S von endlichem Typ, dann ist notwendigerweise $\det \Omega = \pm 1$. Weiter ist F invariant bei der Transformation Ω.

Wir geben noch einige einfache Folgerungen der obigen Definitionen an. Es sei Λ ein Gitter und b ein primitiver Punkt des polaren Gitters Λ^*. Dann enthält der Unterraum H senkrecht auf b ein $(n-1)$-dimensionales Teilgitter L von Λ. Es sei $A = \{a^1, a^2, \ldots, a^n\}$ eine Basis von Λ mit $a^i \in L$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ und $B = A^* = \{b^1, b^2, \ldots, b^{n-1}, b = b^n\}$ die zugehörige Basis von Λ^* (so daß $a^i \cdot b^j = 0$ oder 1 ist, je nachdem $i \neq j$ oder $i = j$ ist). Insbesondere steht b^n senkrecht auf H. Weiter ist der Abstand von a^n zu H gleich $\dfrac{d(\Lambda)}{d(L)}$. Deshalb gilt

$$|b| = \frac{d(L)}{d(\Lambda)}. \tag{I}$$

Aus den Definitionen (2) und (3) folgt unmittelbar

(II) *In Λ gibt es einen Punkt $x \neq o$ mit $F(x) \leqq \lambda(F, \Lambda)$.*

(III) *Für jedes Gitter Λ ist $\lambda(F, \Lambda) \leqq \lambda(F)\, d(\Lambda)^{1/n}$.*

Wir bemerken noch, daß $\lambda(S)$ mit der kritischen Determinante $\Delta(S)$ zusammenhängt mittels $\lambda(S) = \Delta(S)^{-1/n}$ und daß aus $\lambda(S) > 0$ nicht folgt, daß $\lambda(S \cap H) > 0$ ist für jeden $(n-1)$-dimensionalen Sternkörper der Form $S \cap H$.

3. Wir beweisen jetzt den folgenden

Satz 1. *Es sei S ein Sternkörper endlichen Typs und Γ eine Gruppe von Automorphismen Ω von S mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Normalen durch o auf die Hyperebenen H mit $\lambda(S \cap H) = 0$ liegen nicht überall dicht im Raum.*

2. *Zu allen H mit $\lambda(S \cap H) > 0$ gibt es einen Automorphismus $\Omega_H \in \Gamma$ der H in eine fest gegebene Hyperebene $H_0 = \Omega_H H$ überführt.*

3. *Aus $\Omega \in \Gamma$ folgt $\Omega^* \in \Gamma$.*

Dann gibt es einen Punkt b^0 auf dem Rande von S, so daß der Vektor b^0 senkrecht auf H_0 steht, und es gilt

$$\lambda(S)^{n-2} \leqq \lambda(S \cap H_0)^{n-1}\, |b^0|. \tag{4}$$

Beweis. Es sei F die zu S gehörige Distanzfunktion und Λ ein beliebiges Gitter. Wir wollen $\lambda(S, \Lambda)$ abschätzen.

Es sei b irgendein primitiver Punkt von Λ^* und es seien der Unterraum H und das Teilgitter $L < \Lambda$ bestimmt wie früher. Aus der Definition (2) folgt unmittelbar

$$\lambda(S, \Lambda) \leqq \lambda(S \cap H, L).$$

Wir dürfen also annehmen, daß $\lambda(S \cap H) > 0$ ist, weil sonst wegen (III) sicherlich $\lambda(S, \Lambda) = \lambda(S \cap H, L) = 0$ wäre. Dann gibt es einen Automorphismus Ω_H mit $\Omega_H H = H_0$. Dabei ist trivialerweise $\lambda(S \cap H, L) = \lambda(S \cap \Omega_H H, \Omega_H L) = \lambda(S \cap H_0, \Omega_H L)$. Wir setzen nun

$$b^* = \Omega_H^* b.$$

Dann steht b^* senkrecht auf H_0, und es ist $F(b^*) = F(b)$ wegen 3. Weiter ist $\Omega_H^* \Lambda^*$ polar zu $\Omega_H \Lambda$. Wenden wir (III) an auf das $(n-1)$-dimensionale Gitter $\Omega_H L$ und (I) auf den Punkt $b^* \in \Omega_H^* \Lambda^*$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} (5) \quad \lambda(S, \Lambda) &\leqq \lambda(S \cap H_0, \Omega_H L) \leqq \lambda(S \cap H_0)\, d(\Omega_H L)^{1/(n-1)} \\ &= \lambda(S \cap H_0)\, \{|\, b^* \,|\, d(\Omega_H \Lambda)\}^{1/(n-1)} = \lambda(S \cap H_0)\, \{|\, b^* \,|\, d(\Lambda)\}^{1/(n-1)}. \end{aligned}$$

Wichtig ist jetzt, daß $F(b^*) > 0$ ist. Das sieht man so ein. Der Punkt b^* ist verschieden von o und liegt auf einer festen Geraden (senkrecht auf H_0). Wäre nun $F(b^*) = 0$, dann wäre wegen der Bedingung 2 auch $F(z) = 0$ für jeden Punkt $z \neq o$ mit $\lambda(S \cap H_z) > 0$. Wegen 1 enthielte dann $S = \{z \mid F(z) \leqq 1\}$ einen gewissen unbegrenzten Kegel, in Widerspruch zur Voraussetzung, daß S von endlichem Typ ist. Daher muß $F(b^*) > 0$ sein.

Hieraus folgt bereits die Existenz eines Punktes $b^0 = \alpha b^*$ (α reell) mit $F(b^0) = 1$. Offenbar ist $|\, b^* \,| = F(b^*)\, |\, b^0 \,| = F(b)\, |\, b^0 \,|$. Daraus folgt, daß die Abschätzung (5) möglichst gut ist, wenn wir am Anfang den Punkt $b \in \Lambda^*$ so wählen, daß $F(b)$ möglichst klein ist. Nun können wir wegen (II) dafür sorgen, daß $F(b) \leqq \lambda(F, \Lambda^*)$ wird. Wenden wir dann (III) auf $\lambda(F, \Lambda^*)$ an und beachten, daß $d(\Lambda^*) = d(\Lambda)^{-1}$ ist, dann erhalten wir aus (5)

$$\begin{aligned} \lambda(S, \Lambda) &\leqq \lambda(S \cap H_0)\, \{\lambda(F, \Lambda^*)\, |\, b^0 \,|\, d(\Lambda)\}^{1/(n-1)} \\ &\leqq \lambda(S \cap H_0)\, \{\lambda(S)\, |\, b^0 \,|\}^{1/(n-1)} d(\Lambda)^{1/n}. \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für jedes Gitter Λ gilt, haben wir also

$$\lambda(S) \leqq \lambda(S \cap H_0)\, \{\lambda(S)\, |\, b^0 \,|\}^{1/(n-1)}.$$

Damit haben wir (4) bewiesen.

Wir fügen obenstehendem Satz die folgenden Bemerkungen hinzu.

Bemerkung 1. Man kann Überlegungen derselben Art anstellen, wenn in der Bedingung 1 statt H_0 die Existenz endlich vieler Hyperebenen $H_1, H_2, \ldots, H_r$ gefordert wird, derart, daß jede Hyperebene H mit $\lambda(S \cap H) > 0$ durch einen geeigneten Automorphismus Ω in eine der Hyperebenen H_ϱ übergeführt werden kann. Sind $b^1, b^2, \ldots, b^r$ die zugehörigen Punkte auf dem Rande von S, dann bekommt man an Stelle von (4) die Abschätzung

$$(6) \qquad \lambda(S)^{n-2} \leqq \operatorname*{Max}_{\varrho = 1, 2, \ldots, r} \{\lambda(S \cap H_\varrho)^{n-1}\, |\, b^\varrho \,|\}.$$

Bemerkung 2. Für die Anwendungen ist es zweckmäßig, die Bedingung 2 durch die beiden folgenden zu ersetzen:

2ᵃ. Für alle Punkte $z \neq o$ mit $F(z) = 0$ ist $\lambda(S \cap H_z) = 0$.

2ᵇ. Jeder Punkt z mit $F(z) > 0$ wird durch einen geeigneten Automorphismus $\Omega \in \Gamma$ in einen Punkt αb^ϱ übergeführt, wobei α reell und b^ϱ einer von endlich vielen gegebenen Punkten auf dem Rande von S ist.

Man kann dann die Bedingung 1 fallen lassen.

Bemerkung 3. Weiter ist es bequem, die Durchschnitte $S \cap H_\varrho$ auf eine geeignete Koordinatenebene zu projizieren. Bekommt man dabei Körper $S_{n-1,\varrho}$ und ist β_ϱ die Koordinate von b^ϱ in bezug auf die betreffende Koordinatenebene ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$), dann hat man

$$(7) \qquad \lambda(S \cap H_\varrho)^{n-1} \mid b^\varrho \mid = \lambda(S_{n-1,\varrho}) \mid \beta_\varrho \mid \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

Nach diesen Bemerkungen können wir Satz 1 kurz so aussprechen.

Satz 1'. *S sei ein Sternkörper endlichen Typs, mit einer Distanzfunktion F und einer Gruppe Γ von Automorphismen. Es gelten die Bedingungen 2^a, 2^b und 3 und es seien die H_ϱ und β_ϱ definiert wie oben. Dann gilt*

$$(8) \qquad \lambda(S)^{n-2} \leqq \operatorname*{Max}_{\varrho = 1,2,\ldots,r} \{\lambda(S_{n-1,\varrho})^{n-1} \mid \beta_\varrho \mid\}.$$

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall, in dem wir keine Voraussetzungen bezüglich der Automorphismen von S machen. Es zeigt sich, daß man eine gewisse Verallgemeinerung von (4) angeben kann, obwohl das Ergebnis im allgemeinen weniger schön und brauchbar ist. Wir führen die folgende Funktion ein:

$$(9) \qquad G(z) = \{\lambda(S \cap H_z)\}^{n-1} \mid z \mid \qquad (z \neq o),\ G(o) = 0.$$

Ist diese Funktion stetig, dann ist sie eine Distanzfunktion (in n Veränderlichen). Wir beweisen nun

Satz 2. *Es gilt*

$$(10) \qquad \lambda(S)^{n-1} \leqq \lambda(G).$$

Beweis. Es mögen Λ, b, H, L dieselbe Bedeutung haben wie im Beweis von Satz 1. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \lambda(S, \Lambda)^{n-1} &\leqq \{\lambda(S \cap H, L)\}^{n-1} \leqq \lambda(S \cap H)^{n-1} d(L) \\ &= \lambda(S \cap H)^{n-1} \mid b \mid d(\Lambda) = G(b)\, d(\Lambda). \end{aligned}$$

Bei geeigneter Wahl von b ist

$$G(b) \leqq \lambda(G, \Lambda^*) \leqq \lambda(G)\, d(\Lambda^*)^{1/n} = \lambda(G)\, d(\Lambda)^{-1/n}.$$

Wir haben also

$$\lambda(S, \Lambda) \leqq \lambda(G)^{1/(n-1)} d(\Lambda)^{1/n}.$$

Daraus folgt (10), weil Λ beliebig ist.

4. Wir wollen jetzt kurz andeuten, wie die in der Literatur bereits bekannten Ergebnisse aus den obigen Sätzen gewonnen werden können. Wir geben die Koordinaten eines Punktes $x \in R_n$ mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ an.

$$\text{I.} \qquad F_1(x) = \{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2\}^{1/2}.$$

Dann ist $\lambda(F)$ nichts anderes als $\gamma_n^{1/2}$. Satz 1 liefert gerade die Beziehung (1). Siehe Mordell [5] und Oppenheim [8].

$$\text{II.} \quad F_2(x) = \{(x_1)^2 + \cdots + (x_p)^2 - (x_{p+1})^2 - \cdots - (x_n)^2\}^{1/2} \qquad (1 \leqq p \leqq n-1).$$

Wir schreiben jetzt $\lambda(F) = \gamma_{p,q}^{1/2}$ $(q = n - p)$. Die Automorphismen von F sind bekannt und die Bedingungen 2^a, 2^b, 3 können leicht verifiziert werden mit $r = 2$, $b^1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $b^2 = (0, \ldots, 0, 1)$.

Wir erhalten dann (siehe Oppenheim [7, 9], Cassels [12]):

$$(11) \qquad \gamma_{p,q} \leqq \{\operatorname{Max}(\gamma_{p-1,q}, \gamma_{p,q-1})\}^{(n-1)/(n-2)} \qquad (p + q = n).$$

III. $$F_3(x) = |x_1 x_2 x_3|^{1/3} \qquad (n = 3).$$

Die Automorphismen werden gegeben durch $x_i = \tau_i x_i'$ $(i = 1, 2, 3)$, $\Pi \tau_i = \pm 1$. Satz 1′, mit $r = 1$ und $b^1 = (1, 1, 1)$ liefert

$$\lambda(F) \leqq \lambda(S_2)^2,$$

wobei $S_2 = \{x \mid |x_1 x_2 (x_1 + x_2)| \leqq 1\}$ ist. Das führt zum bereits scharfen Ergebnis $\lambda(F) = 7^{-1/3}$ (Mordell [3]).

IV. $$F_4(x) = \{|x_1| ((x_2)^2 + (x_3)^2)\}^{1/3}.$$

Hier findet man ebenso $\lambda(F) = \dfrac{2}{\sqrt{23}}$ (Mordell [3]).

V. $$F_3(x) = |x_1 x_2 \cdots x_n|^{1/n}.$$

Satz 1′ liefert $\lambda(F) \leqq \lambda(S_{n-1})^{(n-1)/(n-2)}$, wobei S_{n-1} gegeben wird durch

$$|x_1 x_2 \cdots x_{n-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})| \leqq 1 \qquad \text{(Mordell [2, 4])}.$$

VI. Ist $F_2(x)$ gegeben wie unter II, dann ist $S = \{x \mid 0 < F_2(x) \leqq 1\}$ zwar kein Sternkörper, aber die Überlegungen der vorigen Nummer bleiben gültig, besonders wenn $p = q$ ist (Cassels [12]).

Soweit haben wir nur Anwendungen von Satz 1 bzw. 1′ angegeben. Es gibt auch Anwendungen von Satz 2.

VII. Ein Ergebnis von Mullender [10] bezüglich der simultanen Approximation zweier reeller Zahlen kann betrachtet werden als eine Anwendung von Satz 2 mit

$$F_5(x) = \{|x_1| \cdot \operatorname{Max}((x_2)^2, (x_3)^2)\}^{1/3}.$$

Wir schreiben $z = (z_1, z_2, z_3)$. Die Hauptschwierigkeit ist dann, eine möglichst gute Abschätzung für das absolute Minimum λ_z des zweidimensionalen Gebietes

$$|z_2 x_2 + z_3 x_3| \cdot \operatorname{Max}((x_2)^2, (x_3)^2) \leqq |z_1|$$

zu bekommen. Die Größe λ_z hängt mit der Funktion $G(z)$ mittels der Beziehung $G(z) = \lambda_z^2 |z|$ zusammen. Wir gehen auf die Einzelheiten nicht näher ein.

VIII. $$F_6(x) = |(x_1)^3 + (x_2)^3 + (x_3)^3|^{1/3} \text{ (Mordell [6])}.$$

Man findet hier $G(z) = \lambda(\Phi_z)^2$, wobei

$$\Phi_z = \Phi_z(x_1, x_2) = \{(x_1 z_3)^3 + (x_2 z_3)^3 - (x_1 z_1 + x_2 z_2)^3\}^{1/3}$$

ist. Dann wird $G(z)$ ein gewisses Polynom sechsten Grades in z_1, z_2, z_3; Abschätzung von $\lambda(G)$ führt zu einer Abschätzung von $\lambda(F_6)$.

Schließlich sei bemerkt, daß mit der obigen Liste die wichtigeren Beispiele zu den beiden Sätzen gegeben, aber daß damit die Anwendungsmöglichkeiten nicht erschöpft sind. Beispiele von Funktionen, auf die Satz 1 angewandt werden kann, sind u. a. $x_1 x_2 ((x_3)^2 + (x_4)^2)$, $((x_1)^2 + (x_2)^2)((x_3)^2 + (x_4)^2)$. Vergleiche auch Armitage [11].

Literatur.

[1] *Ch. Hermite*, Première lettre à M. Jacobi, Oeuvres I, p. 100—121.
[2] *L. J. Mordell*, The product of homogeneous linear forms, J. London Math. Soc. **16** (1941), 4—12.
[3] *L. J. Mordell*, The product of three homogeneous linear ternary forms, J. London Math. Soc. **17** (1942), 107—115.
[4] *L. J. Mordell*, The product of n homogeneous forms, Mat. Sbornik **12** (1943), 273—276.
[5] *L. J. Mordell*, Observation on the minimum of a positive definite quadratic form in eight variables, J. London Math. Soc. **19** (1944), 3—6.
[6] *L. J. Mordell*, On the minimum of a ternary cubic form, J. London Math. Soc. **19** (1944), 6—12.
[7] *A. Oppenheim*, The minima of indefinite quaternary quadratic forms, Proc. National Acad. USA **15** (1929), 724—727.
[8] *A. Oppenheim*, Remark on the minimum of quadratic forms, J. London Math. Soc. **21** (1946), 251—252.
[9] *A. Oppenheim*, Values of quadratic forms. I., Quarterly J. Math. (2) **4** (1953), 54—59.
[10] *P. Mullender*, Simultaneous approximation, Ann. of Math. **52** (1950), 417—426.
[11] *J. V. Armitage*, On a method of Mordell in the geometry of numbers, Mathematika **2** (1955), 132—140.
[12] *J. W. S. Cassels*, An introduction to the geometry of numbers, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959, pp. 268—279.

Eingegangen 4. Oktober 1960.

Zur Statistik der Primfaktoren der natürlichen Zahlen in arithmetischen Progressionen.

Von *G. J. Rieger* z. Zt. in Lafayette, Indiana.

Für eine natürliche Zahl m in der kanonischen Darstellung

$$m = \prod_{p|m} p^{m_p}$$

sei

$$V(m) \doteq \sum_{p|m} m_p \text{ [1]}.$$

Es bezeichne $N(n, x; k, l)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $m \leqq n$ mit $m \equiv l \bmod k$ und

$$V(m) - \log\log n < x\sqrt{\log\log n}. \tag{1}$$

Wir beweisen hier

Satz 1. *Es ist*

$$\frac{N(n, x; k, l)}{n} = \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log n}}\right) \qquad (n \to \infty)$$

mit einer nur von k abhängigen Konstanten im Restglied [2].

Die natürlichen Zahlen $m \leqq n$ mit (1) verteilen sich also gleichmäßig auf die k Restklassen mod k. Für $k = 1$ geht Satz 1 in ein Ergebnis von Rényi und Turán [4] über. Die hier verwendete Methode ist der von [4] sehr ähnlich.

Mein Dank gilt meinem Kollegen Prof. L. J. Cote für anregende Diskussionen über Statistik.

Wir bezeichnen mit χ die $\varphi(k)$ Charaktere mod k; $s = \sigma + it$; die Funktionen

$$L(s, \chi) \doteq \prod_p (1 - \chi(p)\, p^{-s})^{-1} \qquad (\sigma > 1),$$

$$\lambda(s, u, \chi) \doteq \prod_p (1 - e^{iu}\chi(p)\, p^{-s})^{-1} \qquad \begin{pmatrix} u \text{ reell} \\ \sigma > 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m)\, e^{iuV(m)} m^{-s},$$

$$\mu(s, u, \chi) \doteq \lambda(s, u, \chi)\, (L(s, \chi))^{-e^{iu}} \qquad (\sigma > 1) \text{ [3]}$$

sind regulär für $\sigma > 1$. Wegen

$$\log \mu(s, u, \chi) = \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi(p^m)\, e^{iu}(e^{iu(m-1)} - 1)}{m p^{ms}}$$

sind $\mu(s, u, \chi)$ und $\log \mu(s, u, \chi)$ regulär für $\sigma > \frac{1}{2}$; für $\sigma \geqq 1$ ist

$$|\log \mu(s, u, \chi)| \leqq u.$$

---

[1]) $\doteq$ bedeutet $=$ per definitionem.
[2]) Dasselbe gilt für alle im folgenden auftretenden Restglieder.
[3]) Es ist stets der Hauptzweig des Logarithmus zu nehmen.

Nach einer wohlbekannten Formel für Dirichletreihen ist

$$S(n, u, \chi) \doteq \sum_{m \leq n} \chi(m)\, e^{iuV(m)} \log \frac{n}{m}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{n^s \lambda(s, u, \chi)}{s^2}\, ds \qquad (c > 1).$$

Es sei $E(\chi) \doteq 1$ für $\chi = \chi_0$ (Hauptcharakter) und $E(\chi) \doteq 0$ für $\chi \neq \chi_0$. Dann ist

$$S(n, u, \chi) = E(\chi) \left(\frac{\varphi(k)}{k}\right)^{e^{iu}} I_1 + I_2, \tag{2}$$

$$I_1 \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{n^s \mu(s, u, \chi_0)}{s^2 (s-1)^{e^{iu}}}\, ds$$

$$I_2 \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{n^s \mu(s, u, \chi)}{s^2} \left((L(s, \chi))^{e^{iu}} - E(\chi) \left(\frac{\varphi(k)}{k(s-1)}\right)^{e^{iu}} \right) ds.$$

Der Integrand von I_2 ist regulär für $\sigma \geqq 1$ mit Ausnahme von $s = 1$; für $s = 1$ ist der Integrand noch stetig; der Integrationsweg läßt sich also von $\sigma = c$ nach $\sigma = 1$ verlagern; wir zerlegen dann I_2 durch Einführen der Teilpunkte $t = -1, -\frac{1}{\log n}, \frac{1}{\log n}, 1$ und erhalten

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24} + I_{25}.$$

Zunächst ist offensichtlich

$$I_{23} = O\left(\frac{n}{\log n}\right);$$

auf die restlichen 4 Teilintegrale wenden wir partielle Integration bezüglich n^{1+it} an; eine einfache Abschätzung liefert

$$I_{22} = O\left(\frac{n}{\log n}\right), \quad I_{24} = O\left(\frac{n}{\log n}\right),$$

und unter Benutzung der (vor-Weylschen) Abschätzungen

$$|L(1 + it, \chi)| = O(\log |t|), \quad \left|\frac{L'}{L}(1 + it, \chi)\right| = O(\log |t|) \qquad (t \to \infty)$$

für $|u| \leqq \frac{\pi}{6}$ noch

$$I_{21} = O\left(\frac{n}{\log n}\right), \quad I_{25} = O\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

Es ist also

$$I_2 = O\left(\frac{n}{\log n}\right) \qquad \left(|u| \leqq \frac{\pi}{6}\right). \tag{3}$$

Weiter ist

$$I_1 = \mu(1, u, \chi_0)(I_{11} - I_{12}) + I_{13}, \tag{4}$$

$$I_{11} \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{n^s ds}{(s-1)^{e^{iu}}},$$

$$I_{12} \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{n^s (s-1)^{1-e^{iu}} (s+1)}{s^2}\, ds,$$

$$I_{13} \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{n^s (s-1)^{1-e^{iu}}}{s^2} \frac{\mu(s, u, \chi) - \mu(1, u, \chi)}{s-1}\, ds.$$

In I_{12} und I_{13} kann der Integrationsweg von $\sigma = c$ nach $\sigma = 1$ verlegt werden und man findet nach partieller Integration

$$I_{12} = O\left(\frac{n}{\log n}\right) \qquad \left(|u| \leqq \frac{\pi}{6}\right), \tag{5}$$

$$I_{13} = O\left(\frac{n}{\log n}\right) \qquad \left(|u| \leqq \frac{\pi}{6}\right). \tag{6}$$

Nach der Hankelschen Integralformel für die Γ-Funktion ist

$$I_{11} = \frac{n(\log n)^{e^{iu}-1}}{\Gamma(e^{iu})}. \tag{7}$$

Aus (2), (3), (4), (5), (6), (7) folgt

Hilfssatz 1. *Für* $|u| \leqq \frac{\pi}{6}$ *gilt*

$$S(n, u, \chi) = E(\chi)\left(\frac{\varphi(k)}{k}\right)^{e^{iu}} \frac{\mu(1, u, \chi_0)}{\Gamma(e^{iu})}\, n\,(\log n)^{e^{iu}-1} + O\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

Aus Hilfssatz 1 folgt für

$$s(n, u, \chi) \doteq \sum_{m \leqq n} \chi(m)\, e^{iuV(m)}$$

wegen

$$|s(y, u, \chi) - s(x, u, \chi)| \leqq |y - x|, \quad S(n, u, \chi) = \int_1^n \frac{s(x, u, \chi)}{x}\, dx,$$

$$s(n, u, \chi) \log(1 + \lambda)$$
$$= S((1 + \lambda)\, n, u, \chi) - S(n, u, \chi) + \int_n^{(1+\lambda)n} \frac{s(n, u, \chi) - s(x, u, \chi)}{x}\, dx \qquad (\lambda > 0),$$

wenn wir

$$\lambda \doteq \sqrt{\frac{|u|}{\log n}}$$

wählen, unmittelbar

Hilfssatz 2. *Für* $|u| \leqq \frac{\pi}{6}$ *gilt*

$$s(n, u, \chi) = E(\chi)\left(\frac{\varphi(k)}{k}\right)^{e^{iu}} \frac{\mu(1, u, \chi_0)}{\Gamma(e^{iu})}\, n\,(\log n)^{e^{iu}-1}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{|u|}{\log n}}\right)\right) + O\left(\frac{n}{\sqrt{|u| \log n}}\right).$$

Wegen

$$\sum_{\chi} \bar{\chi}(l)\, \chi(m) = \begin{cases} \varphi(k) & \text{für } m \equiv l \bmod k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad ((k, l) = 1)$$

folgt für

$$s(n, u; k, l) \doteq \sum_{\substack{m \leqq n \\ m \equiv l \bmod k}} e^{iuV(m)}$$

aus Hilfssatz 2 sofort

Hilfssatz 3. *Für* $(k, l) = 1$ *und* $|u| \leqq \frac{\pi}{6}$ *gilt*

$$s(n, u; k, l) = k^{-e^{iu}} \frac{\mu(1, u, \chi_0)}{\Gamma(e^{iu})}\, n\,(\varphi(k) \log n)^{e^{iu}-1}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{|u|}{\log n}}\right)\right) + O\left(\frac{n}{\sqrt{|u| \log n}}\right).$$

Mit

$$H(n; k, l) \doteq \sum_{\substack{m \leq n \\ m \equiv l \bmod k}} 1 = \frac{n}{k} + O(1)$$

ist

$$\frac{s(n, u; k, l)}{H(n; k, l)}$$

genau die charakteristische Funktion zur Verteilungsfunktion der Zufallsveränderlichen ξ, die die Werte $\{V(m): m \leqq n,\ m \equiv l \bmod k\}$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit annimmt. Wegen (1) haben wir [4])

$$\psi(n, v; k, l) \doteq \frac{s\left(n, \dfrac{v}{\sqrt{\log\log n}}; k, l\right) e^{-iv\sqrt{\log\log n}}}{H(n; k, l)}$$

einzuführen. Aus Hilfssatz 3 folgt leicht

Hilfssatz 4. *Für* $(k, l) = 1$ *und beliebiges reelles* v *gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \psi(n, v; k, l) = e^{-\frac{v^2}{2}}.$$

Aus Hilfssatz 4 folgt in wahrscheinlichkeitstheoretisch geläufiger Weise [5]), zunächst schwächer als Satz 1,

Satz 2. *Für* $(k, l) = 1$ *ist*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(n, x; k, l)}{n} = \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv.$$

Satz 1 selbst folgt aus Hilfssatz 3 unter Benutzung eines Satzes von Esseen [6]) wörtlich wie in [4], zunächst nur für den Fall $(k, l) = 1$; der allgemeine Fall kann durch Abspalten des Teilers der Restklasse unmittelbar auf diesen zurückgeführt werden. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Es ist nicht schwer, in Satz 1 die Abhängigkeit des Restgliedes vom Modul k explizit anzugeben.

Tanaka [5] verallgemeinert die hier behandelte Fragestellung durch Einführung von gewissen paarweise elementfremden Primzahlmengen $P_1, \ldots, P_t$ und betrachtet gleichzeitig

$$V_j(m) \doteq \sum_{\substack{p \mid m \\ p \in P_j}} m_p \qquad (j = 1, \ldots, t).$$

Die Ergebnisse in [5] werden mit der Brunschen Methode erzielt und sind von der Güte unseres Satzes 2. Auf die Verbesserung des Restgliedes in diesem allgemeineren Problem, durch Verfeinerung der Brunschen Methode einerseits und durch Anwendung der in der vorliegenden Note verwendeten Methode anderseits, hoffen wir bei Gelegenheit zurückzukommen.

---

[4]) Vgl. [1], 185.
[5]) Vgl. [1], 96—98.
[6]) Vgl. [2], Satz 2a.

Wir wenden uns jetzt einer andersgearteten Verallgemeinerung zu. Dazu sei K ein beliebiger algebraischer Zahlkörper. Für das ganze Ideal $\mathfrak{a}$ in der kanonischen Darstellung

$$\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \mathfrak{p}^{a_\mathfrak{p}}$$

sei

$$V(\mathfrak{a}) \doteq \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} a_\mathfrak{p}.$$

Es bezeichne g den Grad von K und $N\mathfrak{a}$ die Norm des Ideals $\mathfrak{a}$. Wir teilen die Menge aller zu dem beliebig gegebenen ganzen Ideal $\mathfrak{f}$ aus K primen ganzen Ideale aus K in (engste) Idealklassen $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$ ein. Bekanntlich ist

$$H(x; \mathfrak{H} \bmod \mathfrak{f}) \doteq \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leqq x \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{H} \bmod \mathfrak{f}}} 1 = c(\mathsf{K}, \mathfrak{f})\, x + O'\left(x^{1-\frac{1}{g}}\right)$$

mit einer nur von K und $\mathfrak{f}$ abhängigen Konstanten $c(\mathsf{K}, \mathfrak{f})$ und einer ebenfalls nur von K und $\mathfrak{f}$ abhängigen Konstanten im Restglied. Es bezeichne $N(n, x; \mathfrak{H} \bmod \mathfrak{f})$ die Anzahl der ganzen Ideale $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$ mit $N\mathfrak{a} \leqq n$ und

$$V(\mathfrak{a}) - \log\log n < x\sqrt{\log\log n}.$$

Der Beweis von Satz 1 überträgt sich ohne wesentlich neue Schwierigkeiten auf diese Verallgemeinerung und liefert

Satz 3. *In jeder Idealklasse* $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$ *eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers* K *gilt*

$$\frac{N(n, x; \mathfrak{H} \bmod \mathfrak{f})}{H(n; \mathfrak{H} \bmod \mathfrak{f})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du + O'\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log n}}\right) \qquad (n \to \infty)$$

oder, was damit gleichbedeutend ist,

$$\frac{N(n, x; \mathfrak{H} \bmod \mathfrak{f})}{c(\mathsf{K}, \mathfrak{f})\, n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du + O'\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log n}}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Satz 3 verallgemeinert einen Satz von Prachar [3].

Auch in Satz 3 kann die Abhängigkeit der Restglieder vom Modul $\mathfrak{f}$ unschwer explizit angegeben werden. Wir verzichten auch auf die Behandlung des Analogons zur Tanakaschen Verallgemeinerung. Ebenso bleibe die Untersuchung anderer additiver arithmetischer Funktionen außer Acht.

Literaturverzeichnis.

[1] *H. Cramér*, Mathematical Methods of Statistics, Princeton 1946.
[2] *C. G. Esseen*, Fourier Analysis of Distribution Functions. Acta Math. **77** (1945), 1—125.
[3] *K. Prachar*, Verallgemeinerung eines Satzes von Hardy und Ramanujan auf algebraische Zahlkörper. Monatsh. d. Math. **56** (1952), 229—232.
[4] *A. Rényi* and *P. Turán*, On a Theorem of Erdös-Kac. Acta Arithm. **4** (1958), 71—84.
[5] *M. Tanaka*, On the Number of Prime Factors of Integers. III. Jap. J. Math. **27** (1957), 103—127.

Eingegangen 15. Oktober 1960.

Zur multiplikativen Zahlentheorie.

Von *Hans-Egon Richert* in Göttingen.

Es ist das Ziel dieser Note, für die Fehlerglieder in gewissen asymptotischen Entwicklungen einige allgemeine Abschätzungen nach unten anzugeben. Derartige Sätze habe ich in [9] im Rahmen der Theorie der starken Rieszschen Summierbarkeit bewiesen. Aus der Vielzahl der möglichen zahlentheoretischen Anwendungen werden einige herausgegriffen, um sie unabhängig von der starken Rieszschen Summierbarkeit und etwas schärfer zu formulieren. Ein typisches Resultat ist der folgende

Satz 1. *Für eine Folge komplexer Zahlen a_n, $n = 1, 2, \ldots$, sei mit einem $\delta > 0$*[1])

$$\sum_{n \leq x} a_n = x + O(x^{\frac{1}{2}-\delta}). \tag{1}$$

Ist dann mit einer Konstanten c

$$\sum_{mn \leq x} a_m a_n = x \log x + cx + O(x^{\alpha}), \tag{2}$$

so gilt

$$\alpha \geqq \tfrac{1}{4}. \tag{3}$$

Für $a_n = 1$ ist (1) (mit $\delta = \frac{1}{2}$) erfüllt, und in (2) handelt es sich um das Dirichletsche Teilerproblem. Hier stellt (3) den bekannten Hardyschen Satz ([4]) dar. Es mag überraschend erscheinen, daß dieselbe Aussage (3) für jede Folge, die (1) erfüllt, zutrifft.

Für den Hauptcharakter $\chi_0(n)$ modulo q haben wir

$$\sum_{n \leq x} \chi_0(n) = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,q)=1}} 1 = \sum_{d|q} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right] = \frac{\varphi(q)}{q} x + O(1).$$

Wählen wir $a_n = \dfrac{q}{\varphi(q)} \chi_0(n)$ in Satz 1, so ergibt sich, daß in der Entwicklung

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,q)=1}} d(n) = \sum_{n \leq x} \chi_0(n)\, d(n) = \sum_{mn \leq x} \chi_0(m)\, \chi_0(n) = \frac{\varphi^2(q)}{q^2} (x \log x + c(q)\, x) + O(x^{\alpha})$$

notwendig $\alpha \geqq \frac{1}{4}$ ist; andererseits ist hier $\alpha < \frac{1}{3}$ für $c(q) = 2 \sum_{p|q} \dfrac{\log p}{p-1} + 2C - 1$ bekannt ([8], Satz 8).

---

[1]) Die untere Summationsgrenze ist, wenn nicht anders angegeben, 1. Die O- und o-Abschätzungen beziehen sich auf die Bewegung einer Veränderlichen gegen $+\infty$.

Für das k-fache Dirichletprodukt beweisen wir den

Satz 2. *Es sei k eine natürliche Zahl $\geqq 2$. Für eine Folge komplexer Zahlen a_n, $n = 1, 2, \ldots$, sei bei jedem $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{n \leqq x} a_n = x + O\left(x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + \varepsilon}\right). \tag{4}$$

Ist dann

$$\sum_{n_1 \cdots n_k \leqq x} a_{n_1} \cdots a_{n_k} = x P_{k-1}(\log x) + O(x^\alpha), \tag{5}$$

wo P_{k-1} ein Polynom $(k-1)$-ten Grades bezeichnet, so gilt

$$\alpha \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}. \tag{6}$$

Für $a_n = 1$ ist (4) erfüllt, und in (5) entsteht das Piltzsche Teilerproblem. (6) liefert hier für jedes $k \geqq 2$ das ebenfalls durch Hardy ([4]) bekannte Resultat.

Die Sätze 1 und 2 werden nicht direkt bewiesen, was etwas einfacher wäre, sondern wir folgern sie aus dem umfassenderen

Satz 3. *Es sei k eine natürliche Zahl $\geqq 2$. Für eine Folge komplexer Zahlen c_n, $n = 1, 2, \ldots$, sei bei jedem $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{n \leqq x} c_n = O\left(x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + \varepsilon}\right), \tag{7}$$

und es sei

$$\sum_{n \leqq x} |c_n|^2 = O(x^\beta) \tag{8}$$

mit keinem $\beta < 1$ erfüllt.

Ist dann

$$\sum_{n_1 \cdots n_k \leqq x} c_{n_1} \cdots c_{n_k} = O(x^\alpha), \tag{9}$$

so gilt

$$\alpha \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}. \tag{10}$$

Im Falle $k = 2$ kann die Bedingung (7) durch

$$\sum_{n \leqq x} c_n = O(x^{1-\delta}) \quad \textit{für ein } \delta > 0 \tag{11}$$

ersetzt werden.

Ist $c_n = \chi(n)$ ein Nicht-Hauptcharakter modulo q, so gelten

$$\sum_{n \leqq x} c_n = O(1)$$

und

$$\sum_{n \leqq x} |c_n|^2 = \sum_{\substack{n \leqq x \\ (n,q)=1}} 1 \geqq \varphi(q) \left[\frac{x}{q}\right],$$

d. h. (7) und (8). Aus (10) folgt dann, daß das Quadrat einer Dirichletschen L-Reihe $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ nicht für $\operatorname{Re} s < \frac{1}{4}$, allgemeiner ihre k-te Potenz nicht für $\operatorname{Re} s < \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$ konvergieren kann (vgl. [10]).

Das entsprechende Resultat ergibt sich offenbar auch mit $c_n = (-1)^{n+1}$, wo die zugehörige Dirichletreihe die alternierende ζ-Reihe darstellt.

Beweis von Satz 3. Eine Dirichletreihe

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it,$$

stellt in ihrer Konvergenzhalbebene $\sigma > \sigma_0(F)$ eine holomorphe Funktion dar, und es gilt auf den Vertikalen

$$F(\sigma + it) = o(|t|) \qquad \text{für } \sigma > \sigma_0(F) \tag{12}$$

(vgl. [5], S. 157 und S. 770). Dies reicht hin, um dort die Carlsonsche Funktion $\nu_\varrho(\sigma, F), 0 < \varrho \leqq 1$, definieren zu können:

$$\nu_\varrho(\sigma, F) = \inf\left\{\xi \,\middle|\, \left(\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |F(\sigma + it)|^{\frac{1}{\varrho}}\, dt\right)^{\varrho} = O(T^{\xi})\right\}.$$

Für unsere Zwecke genügen die folgenden Feststellungen über die Eigenschaften dieser Funktion.

Aus der Hölderschen Ungleichung ergibt sich

$$\nu_\varrho(\sigma, F) \leqq \nu_{\varrho_1}(\sigma, F) \qquad \text{für } 0 < \varrho_1 \leqq \varrho \leqq 1,\ \sigma > \sigma_0(F), \tag{13}$$

und aus der Definition entnimmt man für natürliches k unschwer

$$\nu_{\frac{1}{k}}(\sigma, F) = \frac{1}{k}\, \nu_1(\sigma, F^k) \qquad \text{für } \sigma > \sigma_0(F) \tag{14}$$

(vgl. [9], S. 48 und S. 72). Wird für $0 < \varrho \leqq 1$

$$\gamma_\varrho(F) = \inf\{\sigma \mid \nu_\varrho(\sigma, F) = 0\}$$

gesetzt, so ist nach (14) für natürliches k

$$\gamma_{\frac{1}{k}}(F) = \gamma_1(F^k). \tag{15}$$

Es gelten ([9], Satz 7. 5 und Satz 8. 8)

$$\gamma_{\frac{1}{2}}(F) \leqq \gamma_\varrho(F) \leqq \gamma_{\frac{1}{2}}(F) + \tfrac{1}{2} - \varrho \qquad \text{für } 0 < \varrho \leqq \tfrac{1}{2} \tag{16}$$

und ([7], Hilfssatz 4; vgl. [9], Satz 8. 7)

$$\gamma_{\frac{1}{2}}(F) \leqq \sigma + \nu_{\frac{1}{2}}(\sigma, F) \qquad \text{für } \sigma > \sigma_0(F)\,^{2)} \tag{17}$$

sowie ([9], (7. 17))

$$\nu_\varrho(\sigma, F) = 0 \qquad \text{für } \sigma > \gamma_\varrho(F). \tag{18}$$

Die Konvexität der Carlsonschen Funktion wird in der Form

$$\nu_1(\eta, F) \leqq \frac{\gamma_1(F) - \eta}{\gamma_1(F) - \sigma}\, \nu_1(\sigma, F) \qquad \text{für } \sigma_0(F) < \sigma < \eta < \gamma_1(F) \tag{19}$$

(vgl. [9], S. 53) benutzt.

---

[2]) Dieses ist die wesentlichste der bei den Beweisen unserer Sätze zur Verwendung kommenden Aussagen über die Carlsonsche Funktion. Sie besagt für $\nu_{\frac{1}{2}}(\sigma)$, daß an der Stelle $\gamma_{\frac{1}{2}}$ ihr linksseitiger Differentialquotient $\leqq -1$ ist, also $\nu_{\frac{1}{2}}(\sigma)$ bei $\sigma \to \gamma_{\frac{1}{2}} - 0$ mit einer gewissen Mindestgeschwindigkeit abfällt. Dies verhindert in Verbindung mit (20), daß die Konvergenzabszisse allzu weit links von $\gamma_{\frac{1}{2}}$ gelegen ist. Die analoge Eigenschaft bei der Lindelöfschen μ-Funktion, in die die Carlsonsche Funktion für $\varrho \to +0$ übergeht, würde z. B. die Richtigkeit der Lindelöfschen Vermutung implizieren.

Im quadratischen Mittel gilt an Stelle von (12) nach Grandjot ([3], Satz 4)

$$\nu_{\frac{1}{2}}(\sigma, F) \leqq \tfrac{1}{2} \quad \text{für } \sigma > \sigma_0(F). \tag{20}$$

Schließlich folgt aus $\nu_{\frac{1}{2}}(\sigma, F) = 0$ für ein $\sigma \geqq 0$ nach dem Carlsonschen Mittelwertsatz ([1]; vgl. [9], Satz 8. 6) für jedes $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n \leqq x} |A_n|^2 = O(x^{2\sigma+\varepsilon}). \tag{21}$$

Nach diesen Vorbereitungen setzen wir

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}, \quad f^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

mit

$$b_n = \sum_{n_1 \cdots n_k = n} c_{n_1} \cdots c_{n_k}.$$

Die summatorische Funktion der Koeffizienten ist nach (7) und (9) $O\left(x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\varepsilon}\right)$ bzw. $O(x^{\alpha})$. Nach der bekannten Formel für die Konvergenzabszisse einer Dirichletreihe (vgl. [5], S. 732) konvergieren die Reihen sicherlich für $\sigma > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$ bzw. für $\sigma > \bar{\alpha} = \operatorname{Max}(\alpha, 0)$, wobei wir im Hinblick auf (10)

$$\bar{\alpha} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} \tag{22}$$

annehmen dürfen. Daher sind die obigen Vorbemerkungen für $F = f$ in $\sigma > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$ und für $F = f^k$ in $\sigma > \bar{\alpha}$ anwendbar.

Wäre $\nu_{\frac{1}{2}}(\sigma, f) = 0$ für ein $\sigma < \frac{1}{2}$, so würden wir aus (21) einen Widerspruch zu (8) erhalten. Wegen (18) folgt hieraus mit (16) und (15)

$$\frac{1}{2} \leqq \gamma_{\frac{1}{2}}(f) \leqq \gamma_{\frac{1}{k}}(f) = \gamma_1(f^k) \leqq \gamma_{\frac{1}{2}}(f) + \frac{1}{2} - \frac{1}{k}. \tag{23}$$

Aus (17) bekommen wir mit (13) und (14)

$$\gamma_{\frac{1}{2}}(f) \leqq \eta + \nu_{\frac{1}{2}}(\eta, f) \leqq \eta + \nu_{\frac{1}{k}}(\eta, f) = \eta + \frac{1}{k}\nu_1(\eta, f^k) \quad \text{für } \eta > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} \tag{24}$$

und aus (19) wegen (22), (23), (13) und (20)

$$\nu_1(\eta, f^k) \leqq \frac{\gamma_1(f^k) - \eta}{\gamma_1(f^k) - \sigma}\nu_1(\sigma, f^k) \leqq \frac{\gamma_{\frac{1}{k}}(f) - \eta}{\gamma_{\frac{1}{k}}(f) - \sigma}\nu_{\frac{1}{2}}(\sigma, f^k) \leqq \frac{1}{2}\,\frac{\gamma_{\frac{1}{2}}(f) + \frac{1}{2} - \frac{1}{k} - \eta}{\gamma_{\frac{1}{2}}(f) + \frac{1}{2} - \frac{1}{k} - \sigma} \tag{25}$$

$$\text{für } \bar{\alpha} < \sigma < \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} < \eta < \gamma_{\frac{1}{2}}(f).$$

Dies verwenden wir in (24), setzen

$$\eta = \gamma_{\frac{1}{2}}(f) - \frac{1}{2k} + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2k},$$

und machen den Grenzübergang $\varepsilon \to +0$. Wir erhalten

$$1 \leqq \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}}{\gamma_{\frac{1}{2}}(f) + \frac{1}{2} - \frac{1}{k} - \sigma} \quad \text{für } \bar{\alpha} < \sigma < \frac{1}{2} - \frac{1}{2k},$$

und hieraus folgt wegen $\gamma_{\frac{1}{2}}(f) \geqq \frac{1}{2}$

$$\sigma \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}.$$

Bei $\sigma \to \bar{\alpha} + 0$ ergibt sich ein Widerspruch zu (22), womit (10) bewiesen ist.

Im Falle $k = 2$ liefert (11) an Stelle von (7) nur die Konvergenz der Reihe von $f(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2} - \delta$ (was $> \frac{1}{4}$ angenommen werden kann). Damit bekommen wir (24) und (25) nur für $\eta > \frac{1}{2} - \delta$, beide liefern jedoch

$$\gamma_{\frac{1}{2}}(f) - \eta \leqq \frac{1}{4} \frac{\gamma_{\frac{1}{2}}(f) - \eta}{\gamma_{\frac{1}{2}}(f) - \sigma} \quad \text{für } \bar{\alpha} < \sigma < \frac{1}{2} - \delta < \eta < \gamma_{\frac{1}{2}}(f).$$

Dies ergibt

$$\gamma(f) - \sigma \leqq \tfrac{1}{4},$$

woraus wegen $\gamma_{\frac{1}{2}}(f) \geqq \frac{1}{2}$ wieder (10) folgt.

Die Sätze 2 und 1 können folgenderweise auf Satz 3 zurückgeführt werden.

Die Folge $\{c_n\}$ werde durch

$$c_n = a_n - 2a_{\frac{n}{2}} \tag{26}$$

definiert, wo $a_{\frac{n}{2}}$ für ungerades n Null bedeute. Wir werden zeigen, daß sich aus den Voraussetzungen der Sätze 2 und 1 für die Folge $\{a_n\}$ diejenigen des Satzes 3 mit demselben α für die Folge $\{c_n\}$ ergeben, so daß (10) dann unsere Behauptungen liefert.

Aus (26) erhalten wir

$$\sum_{n \leq x} c_n = \sum_{n \leq x} a_n - 2 \sum_{2n \leq x} a_n = \sum_{n \leq x} a_n - 2 \sum_{n \leq \frac{x}{2}} a_n. \tag{27}$$

Hiermit folgen aus (4) bzw. (1) sofort (7) bzw. (11).

Wir setzen für natürliches h

$$A_h(x) = \sum_{n_1 \cdots n_h \leq x} a_{n_1} \cdots a_{n_h}, \quad C_h(x) = \sum_{n_1 \cdots n_h \leq x} c_{n_1} \cdots c_{n_h},$$

folglich

$$A_{h+1}(x) = \sum_{n \leq x} a_n \sum_{n_1 \cdots n_h \leq \frac{x}{n}} a_{n_1} \cdots a_{n_h} = \sum_{n \leq x} a_n A_h\left(\frac{x}{n}\right), \quad C_{h+1}(x) = \sum_{n \leq x} c_n C_h\left(\frac{x}{n}\right), \tag{28}$$

und zeigen zunächst

$$C_h(x) = \sum_{\nu=0}^{h} (-2)^\nu \binom{h}{\nu} A_h\left(\frac{x}{2^\nu}\right). \tag{29}$$

Für $h = 1$ ist dies nach (27) richtig, und ist (29) für h bereits bewiesen, so folgt mit (28) und (26)

$$\begin{aligned} C_{h+1}(x) &= \sum_{\nu=0}^{h} (-2)^\nu \binom{h}{\nu} \sum_{n \leq \frac{x}{2^\nu}} a_n A_h\left(\frac{x}{2^\nu n}\right) - 2 \sum_{\nu=0}^{h} (-2)^\nu \binom{h}{\nu} \sum_{n \leq \frac{x}{2^{\nu+1}}} a_n A_h\left(\frac{x}{2^{\nu+1} n}\right) \\ &= A_{h+1}(x) + \sum_{\nu=1}^{h} (-2)^\nu \left\{\binom{h}{\nu} + \binom{h}{\nu-1}\right\} A_{h+1}\left(\frac{x}{2^\nu}\right) + (-2)^{h+1} A_{h+1}\left(\frac{x}{2^{h+1}}\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{h+1} (-2)^\nu \binom{h+1}{\nu} A_{h+1}\left(\frac{x}{2^\nu}\right). \end{aligned}$$

Die Voraussetzung (5) bzw. (2) können wir so schreiben:

$$A_k(x) = x \sum_{l=0}^{k-1} d_l \log^l x + \Delta_k(x), \quad \Delta_k(x) = O(x^\alpha).$$

Mit (29) und $\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} = 0$ ergibt sich hieraus

$$C_k(x) = x \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \sum_{l=1}^{k-1} d_l \sum_{\lambda=1}^{l} \binom{l}{\lambda} \log^{l-\lambda} x \,(-\nu \log 2)^\lambda + \sum_{\nu=0}^{k} (-2)^\nu \binom{k}{\nu} \Delta_k\left(\frac{x}{2^\nu}\right),$$

und wegen

$$\sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \nu^\lambda = 0 \qquad \text{für } 1 \leqq \lambda \leqq k-1$$

(vgl. [6], S. 37) erhalten wir

$$C_k(x) = O(x^\alpha).$$

Daher gilt auch (9).

Jetzt soll noch (8) nachgewiesen werden. Es sei

$$\tau = \inf \{\xi \mid \sum_{n \leqq x} |a_n|^2 = O(x^\xi)\}. \tag{30}$$

Aus (4) bzw. (1) folgt mit $0 < \delta_1 < \operatorname{Min}\left(\delta, \frac{1}{2k}\right)$

$$a_n = \sum_{m \leqq n} a_m - \sum_{m \leqq n-1} a_m = 1 + O(n^{\frac{1}{2}-\delta_1}) = O(n^{\frac{1}{2}-\delta_1})$$

und hiermit für $x \geqq x_0$

$$\frac{1}{2} x \leqq |\sum_{n \leqq x} a_n|^2 \frac{1}{x} \leqq \sum_{n \leqq x} |a_n|^2 = O\left(\sum_{n \leqq x} n^{1-2\delta_1}\right) = O(x^{2-2\delta_1}).$$

Daher ist

$$1 \leqq \tau \leqq 2 - 2\delta_1 < 2. \tag{31}$$

Es sei weiter

$$0 < \vartheta < 1,$$

und wir setzen zur Abkürzung

$$r = \left[\frac{\vartheta \log x}{\log 2}\right]. \tag{32}$$

Das natürliche M werde durch

$$2^M \leqq x < 2^{M+1}$$

erklärt.

Aus (26) bekommen wir, wenn u zur Bezeichnung ungerader Zahlen reserviert bleibt,

$$\begin{aligned} a_{2^\mu u} &= -\sum_{\nu=\mu+1}^{\mu+r} (2^{\mu-\nu} a_{2^\nu u} - 2^{\mu-(\nu-1)} a_{2^{\nu-1} u}) + 2^{-r} a_{2^{\mu+r} u} \\ &= -\sum_{\nu=\mu+1}^{\mu+r} 2^{\mu-\nu} (a_{2^\nu u} - 2 a_{2^{\nu-1} u}) + 2^{-r} a_{2^{\mu+r} u} = -\sum_{\nu=\mu+1}^{\mu+r} 2^{\mu-\nu} c_{2^\nu u} + 2^{-r} a_{2^{\mu+r} u}. \end{aligned}$$

Mit der elementaren Ungleichung $(y_0 + \cdots + y_r)^2 \leqq (r+1)^2 (y_0^2 + \cdots + y_r^2)$ folgt hieraus

$$\sum_{n \leqq x} |a_n|^2 = \sum_{\mu=0}^{M} \sum_{u \leqq \frac{x}{2^\mu}} |a_{2^\mu u}|^2 \leqq \sum_{\mu=0}^{M} \sum_{u \leqq \frac{x}{2^\mu}} (r+1)^2 \left\{ \sum_{\nu=\mu+1}^{\mu+r} 2^{2(\mu-\nu)} |c_{2^\nu u}|^2 + 2^{-2r} |a_{2^{\mu+r} u}|^2 \right\}$$

$$\leqq (r+1)^2 \sum_{\nu=0}^{M+r} \sum_{\mu=\nu-r}^{\nu-1} \sum_{u \leqq \frac{x 2^{\nu-\mu}}{2^\nu}} |c_{2^\nu u}|^2 + (r+1)^2 2^{-2r} \sum_{\mu+r=0}^{M+r} \sum_{u \leqq \frac{x 2^r}{2^{\mu+r}}} |a_{2^{\mu+r} u}|^2$$

$$\leqq (r+1)^2 r \sum_{n \leqq x 2^r} |c_n|^2 + (r+1)^2 2^{-2r} \sum_{n \leqq x 2^r} |a_n|^2. \tag{33}$$

Ist nun

$$\sum_{n \leqq x} |c_n|^2 = O(x^\beta), \tag{34}$$

so ergibt sich aus (33) wegen (32) und (30) für jedes $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n \leqq x} |a_n|^2 = O(x^{(1+\vartheta)\beta} \log^3 x) + O(x^{(1+\vartheta)(\tau+\varepsilon)-2\vartheta}),$$

folglich

$$\tau \leqq \operatorname{Max}\left((1+\vartheta)\beta,\ \tau - \vartheta(2-\tau)\right).$$

Nach (31) ist $\lambda < 2$, so daß wegen $\vartheta > 0$ hierin nicht der zweite Term das Maximum sein kann. Mithin haben wir für $0 < \vartheta < 1$

$$\tau \leqq (1+\vartheta)\beta$$

bewiesen, so daß mit (31) folgt, daß in (34) $\beta \geqq 1$ sein muß. Damit ist auch (8) als richtig erkannt.

P. Erdös und W. H. J. Fuchs [2] haben vor einiger Zeit einen allgemeinen Satz über additive Probleme bewiesen. Dieser Satz, der von W. Jurkat kürzlich verschärft wurde, hat gegenüber dem in Satz 1 bewiesenen multiplikativen Analogon verschiedene Vorteile: die Fehlergliedaussage ist präziser, und der auf einem Potenzreihenansatz beruhende Beweis verläuft einfacher. Nach dem genannten Satz ist z. B. beim Kreisproblem $m^2 + n^2 \leqq x$ das Fehlerglied $\neq o(x^{\frac{1}{2}} \log^{-\frac{1}{2}} x)$, nach Jurkat sogar $\neq o(x^{\frac{1}{2}})$.

Da bei unseren obigen Beweisen wesentlich verwendet wurde, daß die erzeugende Dirichletreihe in einer genügend großen Halbebene das Quadrat einer anderen Dirichletreihe ist, was eben beim Kreisproblem nicht zutrifft, liefern die hier bewiesenen Sätze keinen Beitrag zum Kreisproblem, also zu den Aufgaben der allgemeineren Gestalt

$$\sum_{mn \leqq x} a_m b_n.$$

Andererseits bereitete es keine Schwierigkeiten, von Satz 1 zu Satz 2, d. h. zu beliebigem k überzugehen. Demgegenüber ist, wie mir P. Erdös mitteilte, das $k(\geqq 3)$-dimensionale Analogon des Erdös-Fuchsschen Satzes noch unerledigt.

W. Jurkat und P. Erdös haben mir die Frage vorgelegt, ob die Bedingung (1), die bei den additiven Problemen nicht auftritt, entbehrt werden kann. Man kann sie zwar durch eine wesentlich schwächere funktionentheoretische Bedingung (über die Verzweigungspunkte der zugehörigen Dirichletreihe) ersetzen, doch habe ich eine einfache zahlentheoretische Formulierung vorgezogen. Ob man $\delta = 0$ zulassen oder die Voraussetzung (1) etwa gänzlich fortlassen darf, habe ich nicht entscheiden können.

Literatur.

[1] *F. Carlson*, Contributions à la théorie des séries de Dirichlet. I. Ark. Mat. Astr. Fys. **16** (1922), No. 18.
[2] *P. Erdös - W. H. J. Fuchs*, On a problem of additive number theory. J. London math. Soc. **31** (1956), 67—73.
[3] *K. Grandjot*, Untersuchungen über Dirichletsche Reihen. Math. Z. **26** (1927), 593—618.
[4] *G. H. Hardy*, On Dirichlet's divisor problem. Proc. London math. Soc. (2) **15** (1916), 1—25.
[5] *E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig und Berlin 1909.
[6] *E. Netto*, Lehrbuch der Combinatorik. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1927.
[7] *H.-E. Richert*, Beiträge zur Summierbarkeit Dirichletscher Reihen mit Anwendungen auf die Zahlentheorie. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. **1956**, 77—125.
[8] *H.-E. Richert*, Über Dirichletreihen mit Funktionalgleichung. Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. **11** (1957), 73—124.
[9] *H.-E. Richert*, Einführung in die Theorie der starken Rieszschen Summierbarkeit von Dirichletreihen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. **1960**, 17—75.
[10] *E. Landau*, Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen. IV. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. **1924**, 137—150.

Eingegangen 19. Oktober 1960

Einige Abschätzungen der Dichte von Summenmengen in lokalkompakten abelschen Gruppen.

Von *Bruno Müller* in Mainz.

---

1. Bisher wurden additiv-zahlentheoretische Untersuchungen im wesentlichen auf den Grundbereichen der nichtnegativen ganzen Zahlen, reellen Zahlen und der n-Tupel solcher Zahlen, hier mit $\mathfrak{G}_n^+$ und $\mathfrak{R}_n^+$ bezeichnet, durchgeführt. Hinsichtlich Abschätzungen der Dichte von Summenmengen durch die Dichten der Summandenmengen liegen lediglich für $\mathfrak{G}_1^+$ und $\mathfrak{R}_1^+$ abschließende Resultate im sogenannten Mannschen Satz $0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \rightarrow \delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geqq \min(1, \sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}))$ vor, während für $n > 1$ nur wesentlich schwächere, insbesondere von n abhängige Abschätzungen bekannt sind [3]. In der vorliegenden Arbeit werden einige Hauptbegriffe der additiven Zahlentheorie auf beliebige Halbgruppen in lokalkompakten abelschen Gruppen als Grundbereiche übertragen. Dabei erweist sich bei der Dichte eine gewisse Modifikation der bisher auf $\mathfrak{G}_n^+$ und $\mathfrak{R}_n^+$ gebräuchlichen Definition als zweckmäßig. Dann werden Dichteabschätzungen bewiesen, die insbesondere für $\mathfrak{G}_n^+$, $n > 1$, formal besser als die bisher bekannten sind und nicht mehr von n abhängen.

2. Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige (additiv geschriebene) lokalkompakte abelsche Gruppe, μ das Haarsche Maß und $\mathfrak{N}$ eine beliebige Halbgruppe aus $\mathfrak{G}$ mit $0 \in \mathfrak{N}$. Dann bestimmt $\mathfrak{N}$ eine schwache Ordnung (préordre, [1]) von $\mathfrak{G}$ durch die übliche Definition $a \leqq b \longleftrightarrow \exists x \in \mathfrak{N} : a + x = b$. Gleichzeitig gelten genau dann $a \leqq b$ und $b \leqq a$, wenn a, b in derselben Restklasse mod $\mathfrak{g} = \mathfrak{N} \cap -\mathfrak{N}$ liegen.

Die Summenmenge $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ sei wie üblich durch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \{a + b \mid a \in \mathfrak{A},\ b \in \mathfrak{B}\}$ erklärt*). Die Dichte einer Menge $\mathfrak{A} < \mathfrak{N}$ wird durch $\delta(\mathfrak{A}) = \inf\limits_{\mathfrak{K} \in K} \dfrac{\mu_*(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K})}{\mu\mathfrak{K}}$ definiert, wo K eine geeignet gewählte Klasse meßbarer Mengen aus $\mathfrak{N}$ bedeutet. Für $\mathfrak{G}_n^+$ und $\mathfrak{R}_n^+$ pflegt man bislang die Klasse K_1 der Quader $\mathfrak{K}_x = \{y \mid 0 \leqq y \leqq x\}$ mit $\mu\mathfrak{K}_x > 0$ zu benutzen. Das läßt sich unmittelbar für den allgemeinen Fall übernehmen, wenn man zusätzlich die Meßbarkeit der $\mathfrak{K}_x$ und $\mu\mathfrak{K}_x < \infty$ fordert; die so gebildete Dichte werde mit $\delta_1(\mathfrak{A})$ bezeichnet.

Sie erweist sich aber schon auf $\mathfrak{G}_n^+$ und $\mathfrak{R}_n^+$ als ungeeignet. Erstens ist sie schwer zu handhaben, so daß bisher, wie schon gesagt, keine guten Abschätzungen bewiesen werden konnten. Weiter läßt sich für $\mathfrak{G}_n^+$ zeigen, daß das Analogon zum Mannschen Satz

---

*) Ebenso die Differenz $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \{a - b\}$. Die mengentheoretische Differenz wird mit $\mathfrak{A} \dot{-} \mathfrak{B}$ bezeichnet. Zur Einsparung von Klammern sei verabredet, daß die algebraischen Operationen $+, -$ stärker binden sollen als die mengentheoretischen, z. B. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cup \mathfrak{C}$.

für diese Dichte und $n > 1$ nicht richtig ist [2]. Schließlich möchte man aus formalen Gründen die Auszeichnung eines maximalen Elementes $x \in \mathfrak{K}_x$ nur dann für gerechtfertigt halten, wenn die Anordnung von $\mathfrak{G}$ eine totale ist, also bei $\mathfrak{G}_n^+$ und $\mathfrak{N}_n^+$ nur für $n = 1$.

Hier wird deshalb vorgeschlagen, statt K_1 die Klasse K_2 aller derjenigen Mengen $\mathfrak{K}$ zu benutzen, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) $$\mathfrak{K} \text{ meßbar}; \ \mathfrak{K} < \mathfrak{N}; \ 0 < \mu\mathfrak{K} < \infty.$$

(2) $$x \in \mathfrak{K}, \ 0 \leqq y \leqq x \to y \in \mathfrak{K}.$$

Bedingung (2) besagt, daß $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$ nur von $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$ abhängt, und ist notwendig, um einen Dichtebegriff mit den üblichen Eigenschaften zu erhalten. Es gilt $K_1 < K_2$ und daher $\delta_2(\mathfrak{A}) \leqq \delta_1(\mathfrak{A})$. (Die Klassen K_1, K_2 sind für manche Halbgruppen leer. Dann läßt sich kein Dichtebegriff formulieren.)

Es sei angemerkt, daß für die δ_2-Dichte die erwähnten Gegenbeispiele gegen ein Analogon zum Mannschen Satz entfallen.

3. Ferner sei erwähnt, daß für eine sogar kompakte Gruppe $\mathfrak{G}$ diejenigen Halbgruppen $\mathfrak{N}$, auf denen sich ein Dichtebegriff formulieren läßt, und dieser Dichtebegriff selbst genau angegeben werden können. Denn sei $\mathfrak{G}$ kompakt, $\mu\mathfrak{G} = 1$ und $\mathfrak{N}$ eine Halbgruppe $< \mathfrak{G}$ mit $0 \in \mathfrak{N}$. Dann ist entweder $\mu_* \mathfrak{N} = 0$ und daher $K_1 = K_2 = \emptyset$; oder es ist $0 < \mu_* \mathfrak{N} \leqq 1$. Nach [4], Satz 1 gilt dann

$$\mu_* \mathfrak{N} = \mu_*(\mathfrak{N} + \mathfrak{N}) \geqq \mu_* \mathfrak{N} + \mu_* \mathfrak{N} - \mu\mathfrak{H},$$

d. h. $\mu\mathfrak{H} \geqq \mu_* \mathfrak{N}$, wo $\mathfrak{H}$ eine offene kompakte Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} + \mathfrak{H} = \mathfrak{N}$, also mit $\mathfrak{H} < \mathfrak{N}$ ist. Gäbe es nun ein $x \in \mathfrak{N}$, $\notin \mathfrak{H}$, so folgte $x + \mathfrak{H} < \mathfrak{N} + \mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ und hieraus wegen $\mathfrak{H} \cap x + \mathfrak{H} = \emptyset$

$$\mu_* \mathfrak{N} \geqq \mu\mathfrak{H} + \mu(x + \mathfrak{H}) = 2\mu\mathfrak{H}.$$

Es ist also $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$. Die Halbgruppen $< \mathfrak{G}$, auf denen sich ein Dichtebegriff formulieren läßt, sind also gerade die offenen kompakten Untergruppen von $\mathfrak{G}$.

Nun besteht jedes $\mathfrak{K} \in K_2$ aus vollen Restklassen mod $\mathfrak{g}$; denn aus $x \in \mathfrak{K}$ folgt $0 \leqq x + g \leqq x$ für alle $g \in \mathfrak{g}$, also $x + g \in \mathfrak{K}$ nach (2) und somit $x + \mathfrak{g} < \mathfrak{K}$. In unserm Falle, $\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$, hat man $\mathfrak{g} = \mathfrak{H}$ und daher wegen $0 \in \mathfrak{K}$ insbesondere $0 + \mathfrak{H} < \mathfrak{K} < \mathfrak{N} = \mathfrak{H}$ d. h. $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}$ für alle $\mathfrak{K} \in K_2$. Es gilt also $K_1 = K_2 = \{\mathfrak{N}\}$ und deshalb $\delta(\mathfrak{A}) = \mu_*(\mathfrak{A})$. — Dieser spezielle Dichtebegriff ist bereits ausführlich untersucht [4].

4. Es folgen nun Abschätzungen der δ_2-Dichte von Summenmengen.

Satz 1. *Sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige lokalkompakte abelsche Gruppe und $\mathfrak{N}$ irgendeine offene Halbgruppe $< \mathfrak{G}$ mit $0 \in \mathfrak{N}$ und $K_2 \neq \emptyset$. Ferner seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ beliebige Mengen $< \mathfrak{N}$; doch so, daß $\delta_2(\mathfrak{A}) > 0$ ist und es zu $\mathfrak{B}$ eine positive reelle Zahl β mit folgenden Eigenschaften gibt:*

(a) $$\beta \leqq \inf_{\mathfrak{K} \in K_2} \frac{\mu_*(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}) - \mu_*(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g})}{\mu\mathfrak{K} - \mu\mathfrak{g}}$$

($\mathfrak{g}$ ist meßbar, $< \mathfrak{K}$ für alle $\mathfrak{K} \in K_2$ und $\in K_2$)

(b) $$\beta \leqq \frac{\mu_*(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g})}{\mu\mathfrak{g}}$$

(c) $$\beta \leqq \inf_{\mathfrak{h}} \frac{Z_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{h}) - 1}{i(\mathfrak{h}) - 1}$$

(wo $\mathfrak{h}$ alle offenen kompakten echten Untergruppen von $\mathfrak{g}$ durchläuft, $i(\mathfrak{h})$ den Index von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ und $Z_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{h})$ die Anzahl derjenigen Restklassen mod $\mathfrak{h}$ *bedeutet, die mit $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g}$ nichtleeren Durchschnitt haben).*

Dann gilt

(I) $$\delta_2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \geqq (1-\beta)\,\delta_2(\mathfrak{A})+\beta$$

(II) $$\delta_2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \geqq \min\left(1, \frac{\delta_2(\mathfrak{A})}{1-\beta}\right)$$

(III) $$\delta_2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \geqq \min\left(1, \delta_2(\mathfrak{A})+\tfrac{1}{2}\beta\right).$$

5. Anmerkung. Für $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}_n^+$ ist $\mathfrak{g} = \{0\}$. Dann entfällt (c), (b) geht in $0 \in \mathfrak{B}$ über, und der Ausdruck in (a) unterscheidet sich von $\delta_2(\mathfrak{B})$ nur dadurch, daß die 0 nicht „mitgezählt" wird, was auch bisher bei Dichtedefinitionen oft vorgeschrieben war.

Übrigens ergibt der Beweis mit leichten Zusatzüberlegungen, daß auch in $\delta_2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})$ und $\delta_2(\mathfrak{A})$ die δ_2-Dichte durch eine analog gebildete d_2-Dichte, bei der die Elemente $\in \mathfrak{g}$ nicht gezählt werden, ersetzt werden kann. Für $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}_n^+$ ist diese d_2-Dichte der mittels der Anzahlfunktion $A_0(\mathfrak{K}) = \sum\limits_{\substack{a \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{K} \\ a \neq 0}} 1$ gebildete Ausdruck

$$d_2(\mathfrak{A}) = \inf_{\substack{\mathfrak{K} \in K_n \\ \mathfrak{K} \neq \{0\}}} \frac{A_0(\mathfrak{K})}{N_0(\mathfrak{K})}$$

und man hat

Korollar 1. *Für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}_n^+$ mit $d_2(\mathfrak{A}) > 0$ und $0 \in \mathfrak{B}$ gelten die Abschätzungen*

(I′) $$d_2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \geqq d_2(\mathfrak{A})+d_2(\mathfrak{B})-d_2(\mathfrak{A})\,d_2(\mathfrak{B})$$

(II′) $$d_2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \geqq \min\left(1, \frac{d_2(\mathfrak{A})}{1-d_2(\mathfrak{B})}\right)$$

(III′) $$d_2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \geqq \min\left(1, d_2(\mathfrak{A})+\tfrac{1}{2}d_2(\mathfrak{B})\right).$$

6. *Beweis von Satz* 1. Zunächst ist

(3) $$\mathfrak{A}+\mathfrak{B} \cap x+\mathfrak{g} \supset (\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g}).$$

Gibt es ferner ein $a \in \mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g}$, so gilt mindestens eine der drei folgenden Aussagen:

(4) $$(\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g}) = x+\mathfrak{g}$$

(5) $$\mu_*((\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g})) \geqq \mu_*(\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+\beta\mu\mathfrak{g}$$

(6) $$\begin{aligned}\mu\mathfrak{g}-\mu\mathfrak{h} &\geqq \mu_*((\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g})) \\ &\geqq \mu_*((\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+\mathfrak{h})+\beta(\mu\mathfrak{g}-\mu\mathfrak{h})\end{aligned}$$

mit einer offenen kompakten echten Untergruppe $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$.

Denn nach [4], Satz 1 gilt

$$\begin{aligned}\mu_*((\mathfrak{A} \cap x+g)+(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g})) &\geqq \mu_*(\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+\mu_*(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g}) \\ &\geqq \mu_*(\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+\beta\mu\mathfrak{g},\end{aligned}$$

also (5); oder es gibt eine offene kompakte Untergruppe $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{G}$ mit

(7) $$(\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+(B \cap \mathfrak{g}) = (\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g})+\mathfrak{h}$$

(8) $$\mu((\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g})) = \mu((\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+\mathfrak{h})+\mu((\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g})+\mathfrak{h})-\mu\mathfrak{h}.$$

In diesem Falle zeigen wir zuerst $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$: Mit einem $b \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{g}$ ist

$$a+b+\mathfrak{h} \subset (\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g})+\mathfrak{h} = (\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g}) \subset a+\mathfrak{g},$$

also $b+\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ und weiter $\mathfrak{h} = b+\mathfrak{h}-b \subset \mathfrak{g}-\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

Nun hat man entweder $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, und wegen (7) folgt daraus (4). Oder es gilt $\mathfrak{h} \underset{*}{\subset} \mathfrak{g}$. Dann besteht $(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g})+\mathfrak{h}$ gerade aus den $Z_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{h})$ in $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g}$ vertretenen Restklassen mod $\mathfrak{h}$, so daß $\mu((\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g})+\mathfrak{h}) = Z_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{h})\,\mu\mathfrak{h}$ und wegen (8)

$$\begin{aligned}\mu((\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{g})) &= \mu((\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+\mathfrak{h})+Z_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{h})\,\mu\mathfrak{h}-\mu\mathfrak{h} \\ &\geqq \mu((\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+\mathfrak{h})+\beta(i(\mathfrak{h})-1)\,\mu\mathfrak{h} \\ &= \mu((\mathfrak{A} \cap x+\mathfrak{g})+\mathfrak{h})+\beta(\mu\mathfrak{g}-\mu\mathfrak{h}),\end{aligned}$$

d. h. die zweite Ungleichung von (6) gilt. Die erste Ungleichung gilt wegen (7) immer dann, wenn (4) nicht gilt.

7. *Beweis von* (I). Da $\mathfrak{N}$ und damit $\mathfrak{g}$ offen vorausgesetzt sind, besteht jedes $\mathfrak{K} \in K_2$ aus endlich vielen vollen Restklassen mod $\mathfrak{g}$. Zu festem $\mathfrak{K}$ wähle man nun aus denjenigen dieser Restklassen, die mit $\mathfrak{A}$ nichtleeren Durchschnitt haben, je einen Vertreter $\in \mathfrak{A}$ und ordne diese Elemente irgendwie: $a_1, \ldots, a_n$; doch so, daß $a_i \leqq a_k$ für kein $i < k$ gilt, was immer möglich ist. Insbesondere ist dann a_n der wegen $\delta_2(\mathfrak{A}) > 0$ stets vorhandene Vertreter von $\mathfrak{g}$. Dann bilde man die Mengen $\mathfrak{M}_i = \{x \mid x \in \mathfrak{K};\ x \notin \mathfrak{M}_j,\ j < i;\ x \geqq a_i\}$ und $\mathfrak{K}_i = \mathfrak{M}_i - a_i$. Es gilt $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_k = \emptyset$, $i \neq k$; $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i = \mathfrak{K}$; $a_i + \mathfrak{g} < \mathfrak{M}_i$; $\mathfrak{K}_i \in K_2$. Weiter hat man

$$(9) \quad \begin{aligned} \mu_*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap (\mathfrak{M}_i \dot{-} a_i + \mathfrak{g})) &\geqq \mu_*(\mathfrak{B} \cap (\mathfrak{K}_i \dot{-} \mathfrak{g})) \\ &\geqq \beta(\mu\mathfrak{M}_i - \mu\mathfrak{g}) \\ &= \mu_*(\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{M}_i \dot{-} a_i + \mathfrak{g}))(1 - \beta) + \beta(\mu\mathfrak{M}_i - \mu\mathfrak{g}), \end{aligned}$$

da $\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{M}_i \dot{-} a_i + \mathfrak{g}) = \emptyset$ ist. Ferner folgt aus (3) und jeder der Formeln (4) bis (6)

$$(10) \qquad \mu_*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap a_i + \mathfrak{g}) \geqq \mu_*(\mathfrak{A} \cap a_i + \mathfrak{g})(1 - \beta) + \beta\mu\mathfrak{g}.$$

(9) und (10), für $i = 1, \ldots, n$ zusammen summiert, ergeben

$$\mu_*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}) \geqq \mu_*(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K})(1 - \beta) + \beta\mu\mathfrak{K},$$

und hieraus folgt sofort (I).

8. *Beweis von* (II). Eine Restklasse $x + \mathfrak{g} < \mathfrak{K}$ heiße maximal in $\mathfrak{K}$, wenn aus $y \geqq x$, $y \in \mathfrak{K}$ stets $y \in x + \mathfrak{g}$ folgt. Jedes $\mathfrak{K}$ enthält nur endlich viele Restklassen, also wenigstens eine maximale.

Man betrachte nun irgendein $\mathfrak{K}$, dessen maximale Restklassen alle wenigstens ein Element, das $\notin \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ist, enthalten. Es sei $c_1, \ldots, c_n \notin \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ein Vertretersystem aller Restklassen $< \mathfrak{K}$, die Elemente $\notin \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ enthalten, diesmal so geordnet, daß $c_i \geqq c_k$ für kein $i < k$ gilt. Weiter sei jetzt $\mathfrak{M}_i = \{x \mid x \in \mathfrak{K};\ x \notin \mathfrak{M}_j,\ j < i;\ x \leqq c_i\}$ und $\mathfrak{K}_i = c_i - \mathfrak{M}_i$. Dann gilt $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_k = \emptyset$, $i \neq k$; $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i = \mathfrak{K}$; $c_i + \mathfrak{g} < \mathfrak{M}_i$; $\mathfrak{K}_i \in K_2$.

Hilfssatz. *Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Mengen aus einer beliebigen (nicht notwendig offenen) Halbgruppe $\mathfrak{N} < \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{M}$ eine meßbare Menge $\leqq x$. Dann gilt*

$$\mu_*(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}) + \mu_*(\mathfrak{B} \cap x - \mathfrak{M}) \leqq \mu\mathfrak{M}.$$

Beweis mit dem üblichen Schluß (vgl. z. B. [5], 9., Satz 3).

Angewandt auf $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_i \dot{-} c_i + \mathfrak{g}$; $x = c_i$ liefert der Hilfsatz

$$\begin{aligned} &\mu_*(\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{M}_i \dot{-} c_i + \mathfrak{g})) + \mu_*(\mathfrak{B} \cap (\mathfrak{K}_i \dot{-} \mathfrak{g})) \\ &\quad \leqq \mu(\mathfrak{M}_i \dot{-} c_i + \mathfrak{g}) = \mu_*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap (\mathfrak{M}_i \dot{-} c_i + \mathfrak{g})), \end{aligned}$$

denn $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap (\mathfrak{M}_i \dot{-} c_i + \mathfrak{g}) = \mathfrak{M}_i \dot{-} c_i + \mathfrak{g}$. Weiter gilt dann

$$(11) \quad \begin{aligned} &\mu_*(\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{M}_i \dot{-} c_i + \mathfrak{g})) \\ &\quad \leqq \mu_*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap (\mathfrak{M}_i \dot{-} c_i + \mathfrak{g})) - \beta\mu(\mathfrak{M}_i \dot{-} c_i + \mathfrak{g})) \\ &\quad \leqq \mu_*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap (\mathfrak{M}_i \dot{-} c_i + \mathfrak{g}))(1 - \beta). \end{aligned}$$

Andererseits folgt

$$(12) \qquad \mu_*(\mathfrak{A} \cap c_i + \mathfrak{g}) \leqq \mu_*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap c_i + \mathfrak{g})(1 - \beta)$$

trivialerweise, wenn $\mathfrak{A} \cap c_i + \mathfrak{g} = \emptyset$ ist; und aus (5) und (6) unter Beachtung von (3), wenn es ein $a \in \mathfrak{A} \cap c_i + \mathfrak{g}$ gibt; während schließlich (4) wegen $c_i \notin \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ nicht vorkommen kann.

Durch Summation von (11) und (12) erhält man

$$\mu_*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}) \geqq \frac{1}{1-\beta}\,\mu_*(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K}),$$

also

$$\frac{\mu_*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap \mathfrak{K})}{\mu\mathfrak{K}} \geqq \frac{1}{1-\beta}\,\delta_2(\mathfrak{A})$$

für die betrachteten $\mathfrak{K}$. Für die andern $\mathfrak{K}$ mit wenigstens einer maximalen Restklasse $x + \mathfrak{g} \subset \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ist entweder $\mathfrak{K} = \mathfrak{g}$ und dann $\dfrac{\mu_*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap \mathfrak{K})}{\mu\mathfrak{K}} = 1$ oder $\mathfrak{K} \dot{-} x + \mathfrak{g} \in K_2$ und

$$\frac{\mu_*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap \mathfrak{K})}{\mu\mathfrak{K}} \geqq \frac{\mu_*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap (\mathfrak{K} \dot{-} x + \mathfrak{g}))}{\mu(\mathfrak{K} \dot{-} x + \mathfrak{g})},$$

so daß man (II) durch Induktion nach der Anzahl der Restklassen in $\mathfrak{K}$ beweisen kann.

(III) ergibt sich aus (I) und (II) durch Mittelbildung und geringfügige Abschwächung.

9. In der additiven Zahlentheorie pflegt man sich auch für die Basisordnung einer gegebenen Menge $\mathfrak{B}$ bezüglich einer andern Menge $\mathfrak{M}$ zu interessieren; das ist die kleinste ganze Zahl h derart, daß $h\mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \cdots + \mathfrak{B}$ die Menge $\mathfrak{M}$ umfaßt. Der folgende Satz stellt eine Abschätzung einer solchen Basisordnung dar.

Satz 2. *Gelten die Voraussetzungen von Satz 1, so ist*

$$2\left\langle\frac{\ln 2}{\beta}\right\rangle\mathfrak{B} \supset \bigcup_{\mathfrak{K} \in K_2} \mathfrak{K}.$$

Beweis. (I) liefert $\delta_2(n\mathfrak{B}) > \dfrac{1}{2}$, falls $n > -\dfrac{\ln 2}{\ln(1-\beta)}$ ist; also insbesondere für $n_0 = \left\langle\dfrac{\ln 2}{\beta}\right\rangle$. Der Hilfssatz ergibt dann mit geläufigen Schlüssen

$$2n_0\mathfrak{B} \supset \{x \mid \{y \mid 0 \leqq y \leqq x\} \in K_2\},$$

und diese Menge ist gleich $\bigcup\limits_{\mathfrak{K} \in K_2} \mathfrak{K}$.

10. Durch ein Beispiel soll noch die Notwendigkeit der Bedingung (c) in Satz 1 gezeigt werden.

Es sei $\mathfrak{N}_1$ eine Halbgruppe aus einer diskreten Gruppe $\mathfrak{G}_1$ mit $\mathfrak{N}_1 \cap -\mathfrak{N}_1 = \{0\}$; $\mathfrak{g}_1$ eine beliebige kompakte Gruppe und $\mathfrak{g}_2$ die additive Gruppe der ganzen Zahlen mod p, p prim. Weiter sei

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N} &= \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2,\\
\mathfrak{A} &= \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \{0, \ldots, k \bmod p\},\\
\mathfrak{B} &= \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \{0, \ldots, l \bmod p\}
\end{aligned}$$

mit $k + l + 1 < p$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} + \mathfrak{B} &= \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \{0, \ldots, k + l \bmod p\},\\
\delta_2(\mathfrak{A}) &= \frac{k+1}{p},\quad \delta_2(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \frac{k+l+1}{p}
\end{aligned}$$

und

$$\inf_{\mathfrak{h}} \frac{Z_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{h}) - 1}{i(\mathfrak{h}) - 1} = \frac{l}{p-1}.$$

Die Gültigkeit von (I) mit irgendeinem β ergibt die Ungleichung

$$\frac{k+l+1}{p} \geqq \frac{k+1}{p}(1-\beta)+\beta,$$

woraus die Forderung

$$\beta \leqq \frac{l}{p-k-1}$$

und speziell für $k=0$

$$\beta \leqq \frac{l}{p-1} = \inf_{\mathfrak{h}} \frac{Z_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{h})-1}{i(\mathfrak{h})-1}$$

folgt. Entsprechend ergibt (II)

$$\frac{k+l+1}{p} \geqq \frac{1}{1-\beta}\,\frac{k+1}{p},$$

also

$$\beta \leqq \frac{l}{k+l+1}$$

und diesmal für $k=p-l-2$

$$\beta \leqq \frac{l}{p-1}.$$

Literatur.

[1] *N. Bourbaki*, Algèbre (1179), Chap. VI. Hermann, Paris 1952.
[2] *L. Cheo*, On the density of sets of Gaussian integers. Amer. Math. Monthly **58** (1951), 618—620.
[3] *F. Kasch*, Wesentliche Komponenten bei Gitterpunktmengen. I. Crelles Journal **197** (1957), 208—215.
[4] *M. Kneser*, Summenmengen in lokalkompakten Abelschen Gruppen. Math. Zschr. **66** (1956), 88—110.
[5] *H. Ostmann*, Additive Zahlentheorie. I. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1956.
[6] *H. Schell*, Über einige Probleme der Addition von linearen Punktmengen. Crelles Journal **200** (1958), 52—88.

Eingegangen 25. Oktober 1960.

Rational points on curves of genus greater than 1.

By *W. J. Le Veque* *) in Ann Arbor, Michigan.

1. Introduction. Let K be an algebraic number field, and let $f(x, y)$ be a polynomial with coefficients in K. We shall be concerned with the points (x, y) on the curve C: $f(x, y) = 0$ whose coordinates x and y belong to K, more briefly, with the K-rational points on C. The idea of using the powerful methods of algebraic geometry and the theory of algebraic functions to attack such arithmetic questions goes back at least as far as 1890, when Hilbert and Hurwitz [1] initiated the investigation of curves of genus $g = 0$. The two principal theorems of the subject are those due to Mordell [7] and Weil [10] on the one hand (this is stated below; it concerns the structure of the set of K-rational points on curves of positive genus), and to Siegel [9] on the other. Siegel's theorem gives necessary and sufficient conditions that the equation $f(x, y) = 0$ have infinitely many integral solutions in some algebraic number field; it implies in particular that no equation of positive genus has infinitely many such solutions. For reasons to be explained below Mordell conjectured that no curve with $g > 1$ has infinitely many K_0-rational points for any algebraic number field K_0, but this remains unproved.

In 1933 Mahler [4] extended Siegel's theorem, in the case $g = 1$ and $K = Q$ (Q is the field of rational numbers), in the following way:

Suppose that the irreducible polynomial $f(x, y)$ has rational coefficients, and that the curve C: $f(x, y) = 0$ is of genus 1. If C contains an infinite sequence $\mathfrak{M}$ of distinct points with coordinates in Q, and if $\mathfrak{z}(x, y)$ is a rational function with coefficients in Q, which is not constant on C, then the greatest prime number dividing the denominator of the rational number $\mathfrak{z}(x, y)$ increases without limit as (x, y) runs through $\mathfrak{M}$.

Taking $\mathfrak{z}(x, y) = x$, we see in particular that it is impossible that the first coordinates of the points of $\mathfrak{M}$ should have denominators composed solely of primes from a fixed finite set.

It is the object of the present paper to extend Mahler's theorem to curves of genus $g > 1$, for arbitrary K. The following theorem will be proved:

Theorem. *Let C: $f(x, y) = 0$ be an algebraic curve of genus $g > 1$, with coefficients in an algebraic number field K. Suppose there is an infinite sequence $\mathfrak{M}$ of K-rational points on C, and let $\mathfrak{z}(x, y)$ be a rational function, with coefficients in K, which is not constant on C. For $(x, y) \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{z}(x, y)$ is a number of K, and hence can be represented in the form*

$$\mathfrak{z}(x, y) = \frac{A(\mathfrak{z}(x, y))}{B(\mathfrak{z}(x, y))},$$

where A and B are integers of K such that the ideal (A, B) is one of finitely many ideals of K. Then $\max_{p|(B)} Np$ increases without limit as (x, y) runs through $\mathfrak{M}$. (Here p ranges over the prime ideals of K which divide (B).)

---

*) Sloan Fellow.

It is possible, of course, that this theorem is vacuously true, since if Mordell's conjecture is correct there is no such sequence $\mathfrak{M}$ as is described in the theorem.

The proof depends heavily on techniques and results of Siegel and Mahler, and the following section is devoted to the required background material, mostly from the theory of algebraic functions. Use will also be made of an extension of Roth's theorem on the approximation of algebraic numbers, which may be stated as follows:

Let K be an algebraic number field of degree n over Q, the rational field. Suppose that K has r_1 real conjugate fields $K_1, \ldots, K_{r_1}$ and $2r_2$ nonreal conjugate fields $K_{r_1+1}, \ldots, K_{r_1+2r_2} = K_n$, the pairs K_{r_1+l} $K_{r_1+r_2+l}$ being complex conjugate. Let $g_i = 1$ for $1 \leqq i \leqq r_1$ and $g_i = 2$ for $r_1 < i \leqq r_1 + r_2$; and for $\alpha \in K$ let $|\alpha|_i = |\alpha^{(i)}|$, where $\alpha^{(i)}$ is the conjugate of α in K_i. Put $|\alpha|_i^* = \min(|\alpha_i|, 1)$.

If $\mathfrak{P}$ is a prime ideal of K, dividing the rational prime p, let $g(\mathfrak{P}) = [K_{\mathfrak{P}} : Q_p]$, where $K_{\mathfrak{P}}$ and Q_p are the completions of K and Q by the valuations $|\ldots|_{\mathfrak{P}}$ and $|\ldots|_p$ respectively. Put $|\alpha|_{\mathfrak{P}}^* = \min(|\alpha|_{\mathfrak{P}}, 1)$.

Let r, r', r'' be nonnegative integers, and let

$$\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r; \mathfrak{P}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{P}_{r+r'}; \mathfrak{P}_{r+r'+1}, \ldots, \mathfrak{P}_{r+r'+r''}$$

be distinct prime ideals of K. Let $F_{(1)}(x), \ldots, F_{(r_1+r_2)}(x), F_1(x), \ldots, F_r(x)$ be arbitrary equal or distinct nonconstant polynomials with coefficients in K which do not vanish for $x = 0$ and have no multiple factors.

Suppose there is an infinite sequence of distinct elements $x \neq 0$ of K satisfying

$$\prod_{i=1}^{r_1+r_2} |F_{(i)}(x)|_i^{*g_i} \cdot \prod_{j=1}^{r} |F_j(x)|_{\mathfrak{P}_j}^{*g(\mathfrak{P}_j)} \cdot \prod_{j=r+1}^{r+r'} |x|_{\mathfrak{P}_j}^{*g(\mathfrak{P}_j)} \cdot \prod_{j=r+r'+1}^{r+r'+r''} \left|\frac{1}{x}\right|_{\mathfrak{P}_j}^{*g(\mathfrak{P}_j)} \leqq C \cdot H(x)^{-\tau}$$

where $H(x)$ is the maximum of the absolute values of the coefficients of the irreducible primitive equation for x with rational integral coefficients, and C is constant. Then $\tau \leqq 2$.

This theorem is stated without proof in Mahler's forthcoming monograph [6] on Diophantine approximation. It represents a straightforward amalgamation of the rational p-adic Roth theorem first proved by Ridout [8] and exposed in detail in Mahler's monograph, with the algebraic Roth theorem to be found in the author's book [3].

S. Lang [2] announced in 1960 that he had proved following theorem:

Let K be a finite (algebraic or transcendental or mixed) extension of Q containing a subring R which is a finite ring extension of the rational integers. If $f(x, y)$ has coefficients in K and genus $\geqq 1$, then there are only finitely many points on the curve $f(x, y) = 0$ with coordinates in R.

The main result of the present paper, which I had proved in 1958, is the special case of Lang's theorem in which K is algebraic over Q. Since Lang's proof has not yet appeared, and is presumably rather different from mine, there is perhaps still some point in publishing the present proof. Lang's result can probably be obtained from mine by the method used by Mahler [5].

Note added in proof: Prof. Lang has pointed out to me that Mahler's technique in [5] is inadequate here; one needs instead such a result as Theorem 6 of *A. Néron*, Bull. Soc. Math. France 80 (1952), 101—166.

2. Preliminaries. The equation $f(x, y) = 0$ defines y as an algebraic function of x; the function y is single valued on an appropriate n-sheeted Riemann surface $\mathfrak{R}$ covering the Riemann sphere of complex numbers. Points of $\mathfrak{R}$ are called *places* of C. $\mathfrak{R}$ is homeomorphic to a sphere with g handles, and the number g, the *genus* of $\mathfrak{R}$, is unique. Starting from any point of $\mathfrak{R}$ which is not a branch point, g pairs of closed cuts $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{A}_g, \mathfrak{B}_g$ can be made on $\mathfrak{R}$ such that the resulting cut surface is simply connected. The functions

which are single valued on $\mathfrak{R}$ are exactly the rational functions of x and y; in their totality they comprise the algebraic function field $\mathfrak{K}$ defined by $f(x, y) = 0$. Algebraically, $\mathfrak{K}$ is the finite algebraic extension $\mathfrak{C}(x, y)$ of the purely transcendental extension $\mathfrak{C}(x)$ of the complex numbers $\mathfrak{C}$. If u is any nonconstant element of $\mathfrak{K}$, there is a $v \in \mathfrak{K}$ such that $\mathfrak{K} = \mathfrak{C}(u, v)$; since u and v are rational functions of x and y, and conversely, the transformation $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ is a birational transformation on C. Since the genus is invariant under birational transformations, in the sense that the genus of the equation $h(u, v) = 0$ connecting u and v is also g, we can speak of the genus of $\mathfrak{K}$. The reason that it is the genus of $f(x, y) = 0$, and not its degree, which figures in the theorems mentioned earlier about Diophantine equations, is that a birational transformation with coefficients in K establishes a $1-1$ correspondence between the K-rational places of $f(x, y) = 0$ and those of $h(u, v) = 0$, and the degree is not invariant under such transformations.

A *divisor* $\mathfrak{a}$ on C is a formal product $\mathfrak{p}_1^{\alpha_1}\mathfrak{p}_2^{\alpha_2} \cdots \mathfrak{p}_r^{\alpha_r}$ of places, that is, it is an element of the free abelian group (written multiplicatively) generated by the places. The number $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ is called the *order* of $\mathfrak{a}$. If all the α_i are positive, $\mathfrak{a}$ is said to be *integral*. If $u \in \mathfrak{K}$ has $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ as zeros and $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ as poles, then

$$(u) = \frac{\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r}{\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_r}$$

is called the divisor of u. Two divisors $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ are said to be equivalent, and we write $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, if $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ is the divisor of a function of $\mathfrak{K}$. This equivalence partitions the set of divisors into the divisor classes. If $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ are equivalent, they are of the same order, but not conversely for $g > 0$.

A divisor $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$ is said to be *K-rational* if the rational symmetric functions of the (x, y)-coordinates of $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$, with rational coefficents, are numbers in K.

Let $\mathfrak{p}_0$ be a fixed place of C. There are g abelian integrals of the first kind on $\mathfrak{R}$, i. e., integrals

$$\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} u_1 dx, \ldots, \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} u_g dx$$

of elements $u_1, \ldots, u_g$ of $\mathfrak{K}$ which are finite-valued analytic functions of $\mathfrak{p}$ for all points $\mathfrak{p}$ on $\mathfrak{R}$ without exception. Their values are not independent of the path between $\mathfrak{p}_0$ and $\mathfrak{p}$; rather, if we put

$$\alpha_{ij} = \int_{\mathfrak{A}_i} u_j dx, \qquad \beta_{ij} = \int_{\mathfrak{B}_i} u_j dx, \qquad i, j = 1, \ldots, g,$$

then changing the path changes $\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} u_j dx$ by a number of the form

$$\Omega_j = \sum_{i=1}^{g} (a_i \alpha_{ij} + b_i \beta_{ij}), \tag{1}$$

where the a_i and b_i are rational integers. Forming the $g \times 2g$ matrix M whose entries are the α_{ij} and β_{ij}, we indicate this indeterminacy by writing

$$U_j \equiv \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} u_j dx \pmod{M}, \qquad j = 1, \ldots, g.$$

The numbers α_{ij} and β_{ij}, for $i = 1, \ldots, g$, are called the periods of the integral U_j, and M is called the periods matrix.

We shall call an integral divisor of order g a *point-group*. Let $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_g$ be a point-group on $\mathfrak{R}$. The sums

$$\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_1} u_j dx + \cdots + \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_g} u_j dx, \qquad j = 1, \ldots, g$$

which we abbreviate to

$$w_j = w_j(\mathfrak{a}) = \int_{\mathfrak{p}_0^g}^{\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_g} u_j dx, \qquad j = 1, \ldots, g$$

are determined (mod M), and we call $w_1, \ldots, w_g$ the *abelian coordinates* of $\mathfrak{a}$. The classical addition theorem asserts that if $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ are K-rational, where $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ are point-groups, then there is a K-rational point-group $\mathfrak{c}$ such that

$$(2) \qquad w_j(\mathfrak{a}) + w_j(\mathfrak{b}) \equiv w_j(\mathfrak{c}) \pmod{M}, \qquad j = 1, \ldots, g$$

and the divisor class of $\mathfrak{c}$ is unique, for all $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$, since by Abel's theorem $w(\mathfrak{c}) \equiv w(\mathfrak{c}')$ if and only if $\mathfrak{c} \sim \mathfrak{c}'$. According to the Riemann-Roch theorem, there is in general at most one point-group in a divisor class. If case (2) holds we write $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$; under this operation the set A_K^g of K-rational point-groups becomes an abelian group, if we identify equivalent point-groups. The Mordell-Weil theorem mentioned earlier asserts that A_K^g, which may well be an infinite group, is finitely generated, for every $g > 0$ and every K. In other words, there is a finite set of abelian coordinate vectors $\boldsymbol{w}_k = (w_{k1}, \ldots, w_{kg})$, $k = 1, \ldots, s$, such that the abelian coordinates $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_g)$ of each element of A_K^g can be written in the form

$$(3) \qquad \boldsymbol{w} \equiv a_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_s \boldsymbol{w}_s \pmod{M},$$

where $a_1, \ldots, a_s$ are rational integers. Mordell's conjecture is that for $g > 1$, only finitely many of the $\mathfrak{a} \in A_K^g$ are of the form $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{p} \cdots \mathfrak{p}$.

The Riemann inversion theorem asserts that the map $\mathfrak{a} \to \boldsymbol{w}(\mathfrak{a}) \pmod{M}$, which carries the g-fold product $\mathfrak{R} \times \cdots \times R$ into *a* torus T^g of (complex) dimension g, is onto, and is in general $1 - 1$. That is, every point of T^g has as coordinates the abelian coordinates of a point-group, and the latter is unique except on a set in T^g of dimension less than g.

Let $(w_1, \ldots, w_g)$ and $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_g)$ be particular abelian coordinates for the point-groups $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{c}$ respectively. Then the general expression for all coordinate vectors for $\mathfrak{a} - \mathfrak{c}$ is

$$(4) \qquad (w_1 - c_1 + \Omega_1, \ldots, w_g - c_g + \Omega_g),$$

where the Ω_j are defined in (1). If $n > 1$ is a rational integer, then there are exactly n^{2g} vectors

$$(5) \qquad \left(\frac{w_1 - c_1 + \Omega_1}{n}, \ldots, \frac{w_g - c_g + \Omega_g}{n}\right)$$

which are incongruent (mod M), because in (1) the $2g$ integers a_i and b_i, which are determined by the path and are the same for all j, can range independently over $0, 1, \ldots, n - 1$. Thus in general each point-group $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^g$ gives rise to n^{2g} point-groups $\mathfrak{b} = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_g$ such that $\boldsymbol{w}(\mathfrak{a}) \equiv n\boldsymbol{w}(\mathfrak{b}) + \boldsymbol{w}(\mathfrak{c}) \pmod{M}$. The set of all rational symmetric functions of the (x, y)-coordinates of the g places $\mathfrak{P}_i$ occurring in $\mathfrak{b}$ is again an algebraic function field, called an *n-division field* $\mathfrak{K}_n = \mathfrak{K}_n(\boldsymbol{c})$ of $\mathfrak{K}$. It is an abelian unramified algebraic extension of $\mathfrak{K}$, and it is of degree n^{2g} if $(n, g) = 1$, as we henceforth assume. We designate the Riemann surface of $\mathfrak{K}_n$, which is an n^{2g}-sheeted covering surface of $\mathfrak{R}$, by $\mathfrak{R}_n$. The point-groups $\mathfrak{b}$ such that $n\mathfrak{b} \equiv 0 \pmod{M}$, which are called the *n-division point-groups*, consist of places with algebraic coordinates, if $\mathfrak{p}_0$ is algebraic.

The classical theory of n-division fields was extended by Siegel in [9]. He proved the following assertions:

1) If n is sufficiently large, and $\mathfrak{p}_0$ is suitably chosen, then for all but finitely many $\mathfrak{p} \in \mathfrak{R}$ there is, for each set of periods $\Omega_1, \ldots, \Omega_g$, a uniquely determined point-group $\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_g$ with abelian coordinates (5), where $\boldsymbol{w}(\mathfrak{p}^g) = (w_1, \ldots, w_g)$.

2) If $\varphi(\mathfrak{p}) \in \mathfrak{R}$ is of order ϱ, then the function

$$\Phi(\mathfrak{p}) = \varphi(\mathfrak{P}_1) \cdots \varphi(\mathfrak{P}_g)$$

is an element of $\mathfrak{R}_n$ of order $\varrho g^3 n^{2g-2}$ at most. ($\varphi(\mathfrak{p})$ itself, as an element of $\mathfrak{R}_n$, is of order n^{2g} of course.)

3) Let the (x, y)-coordinates of $\mathfrak{P}_i$ be ξ_i, η_i, for $i = 1, \ldots, g$. Then for suitably chosen $t_1, t_2, \alpha_1, \ldots, \gamma_2$ in K, the functions

$$\Phi_\varkappa(\mathfrak{p}) = \prod_{i=1}^{g} \left(t_\varkappa - \frac{\alpha_1 \xi_i + \beta_1 \eta_i + \gamma_1}{\alpha_2 \xi_i + \beta_2 \eta_i + \gamma_2} \right), \qquad \varkappa = 1, 2$$

generate $\mathfrak{R}_n$, and the degree of the equation connecting Φ_1 and Φ_2 is at most $hg^3 n^{2g-2}$, where h is the order of $f(x, y) = 0$. This equation has coefficients in K.

In the proof which follows it is necessary to use a finiteness theorem such as the Mordell-Weil theorem, but it is possible to use a much less deep result than the latter theorem. This *weak Weil finiteness theorem* is the following:

Suppose that K_n is an algebraic number field containing the n-division point-groups $\mathfrak{b}$ and the n-th roots of unity. Then the subgroup of point-groups of the form $n\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \in A_K^g$, is of finite index in the group A_K^g. That is, there is a finite set of point-groups $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_s$ of A_K^g such that for every $\mathfrak{a} \in A_K^g$ there is a $\mathfrak{b} \in A_K^g$ and an index i such that

$$\boldsymbol{w}(\mathfrak{a}) \equiv n\boldsymbol{w}(\mathfrak{b}) + \boldsymbol{w}(\mathfrak{c}_i) \pmod{M}. \tag{6}$$

Weil proved and used this result as an intermediate step in his proof in [10].

3. Proof of the main theorem. Suppose that $\mathfrak{p}_0$, the fixed place occurring in the abelian coordinatization of $\mathfrak{R}$, is K-rational and is so chosen that Siegel's result 1) above is valid for $n = n_0 > 1$, with $(n_0, g) = 1$. It is clear that if our main theorem is true for an algebraic number field K^*, it is also true for every subfield of K^*. There is therefore no loss in generality in now supposing that K is extended, if necessary, to include the n_0-th roots of unity and the rational symmetric functions, with rational coefficients, of the places occurring in the n_0-division point-groups. We call the new field K again.

The weak Weil finiteness theorem is now valid for $n = n_0$, $K_n = K$. For $\mathfrak{a} \in A_K^g$ we can find $\mathfrak{a}_1 \in A_K^g$ such that

$$\boldsymbol{w}(\mathfrak{a}) \equiv n_0 \boldsymbol{w}(\mathfrak{a}_1) + \boldsymbol{c}_{i_1} \pmod{M},$$

where $\boldsymbol{c}_{i_1}$ is one of finitely many complex g-tuples. Similarly, we can find $\mathfrak{a}_2 \in A_K^g$ such that

$$\boldsymbol{w}(\mathfrak{a}_1) \equiv n_0 \boldsymbol{w}(\mathfrak{a}_2) + \boldsymbol{c}_{i_2} \pmod{M},$$

Hence

$$\boldsymbol{w}(\mathfrak{a}) \equiv n_0^2 \boldsymbol{w}(\mathfrak{a}_2) + (n_0 \boldsymbol{c}_{i_2} + \boldsymbol{c}_{i_1}) \equiv n_0^2 \boldsymbol{w}(\mathfrak{a}_2) + \boldsymbol{c}' \pmod{M},$$

where $\boldsymbol{c}'$ is one of finitely many g-tuples. Iterating, we see that if q is a positive integer and $n = n_0^q$, then there is a finite set of g-tupies $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(q)$ such that for every $\mathfrak{a} \in A_K^g$ there is a $\mathfrak{b}$ for which

$$\boldsymbol{w}(\mathfrak{a}) \equiv n\boldsymbol{w}(\mathfrak{b}) + \boldsymbol{c} \pmod{M}, \quad \mathfrak{b} \in A_K^g. \tag{7}$$

Hereafter n will be restricted to be of the form n_0^q, so that (7) is valid for fixed K and arbitrarily large n.

Let $\mathfrak{N}$ be any sequence of K-rational points on C: $f(x, y) = 0$, and let $\zeta(x, y)$ be a rational function with coefficients in K. The numbers $\zeta(\mathfrak{p})$ are in K, for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{N}$, and we say that ζ is *totally bounded* on $\mathfrak{N}$ in case the maximum of the absolute values of the conjugates of $\zeta(\mathfrak{p})$ is bounded on $\mathfrak{N}$. The various conjugates $(\zeta(\mathfrak{p}))^{(\varkappa)}$ arise by evaluating the function $\zeta^{(\varkappa)}(x, y)$, obtained by replacing the coefficients in $\zeta(x, y)$ by their respective conjugates, at the conjugate points $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$. The latter are not ordinarily points on C, but rather on the conjugate curves $C^{(\varkappa)}$: $f^{(\varkappa)}(x, y) = 0$.

Suppose that $[K:Q] = l$. No two of the $l + 1$ functions

$$\zeta_\lambda = \frac{1}{\zeta + \lambda}, \qquad \lambda = 0, 1, \ldots, l$$

have any poles in common on C, so there are l of the functions ζ_λ with the following property: there is an infinite subsequence $\mathfrak{N}'$ of $\mathfrak{N}$ whose elements lie outside of suitably small neighborhoods of all the poles of all these l functions. Now consider a conjugate field $K^{(1)}$. No two of the conjugates $\zeta_\lambda^{(1)}$ of the l functions ζ_λ have any poles in common on $C^{(1)}$, so there are $l - 1$ of the functions ζ_λ with the following property: there is an infinite subsequence $\mathfrak{N}''$ of $\mathfrak{N}'$ such that for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{N}''$, $\mathfrak{p}^{(1)}$ lies outside of suitably small neighborhoods of all the poles on $C^{(1)}$ of all the $l - 1$ functions $\zeta_\lambda^{(1)}$. Continuing in this fashion, we come finally to a particular function ζ_λ with the property that there is an infinite subsequence $\mathfrak{N}_0$ of $\mathfrak{N}$ consisting of points whose conjugates are bounded away from the poles of the corresponding conjugates of ζ_λ. Hence ζ_λ is totally bounded on $\mathfrak{N}_0$.

Now let $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{z}$ be as described in the theorem, and suppose that, contrary to th etheorem, there is a finite set of prime ideals $p_1, \ldots, p_t$ of K, such that every prime ideal dividing $B(\mathfrak{z}(\mathfrak{p}))$, for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$, is one of these. (For simplicity here and hereafter, we identify an integer of K with the principal ideal generated by that integer, when convenient.) Form $\mathfrak{M}_1$ by deleting from $\mathfrak{M}$ the finitely many exceptional points mentioned in 1), for $n = n_0$. Let q be a positive integer, and put $n = n_0^q$. By the relation (7), every element of $\mathfrak{M}_1$ corresponds to one of the finitely many g-tuples $\boldsymbol{c}$, so there is an infinite subsequence $\mathfrak{M}_2$ of $\mathfrak{M}_1$ corresponding to a fixed g-tuple $\boldsymbol{c}_0$. We form the n-division field $\mathfrak{K}_n = \mathfrak{K}_n(\boldsymbol{c}_0)$, with generators Φ_1 and Φ_2 as in 3). For every $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}_2$, at least one of the corresponding point-groups $\mathfrak{b} = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_g$ in (7) is K-rational. Choose one such point-group for each $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}_2$; to each of them corresponds a single point on $\mathfrak{K}_n$, and we designate by $\mathfrak{M}_3$ this sequence of points on $\mathfrak{K}_n$. For $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}_3$ the quantities $\Phi_1(\mathfrak{p})$ and $\Phi_2(\mathfrak{p})$ are numbers of K, and of course $\mathfrak{z}$ has the same value at a point of $\mathfrak{M}_3$ as at its projection in $\mathfrak{M}_2$. Using the process described in the preceding paragraph, we can find a rational integer λ such that the function

$$\mathfrak{z}_1(\mathfrak{p}) = \frac{1}{\mathfrak{z}(\mathfrak{p}) + \lambda}$$

is totally bounded on $\mathfrak{M}_3$. Moreover, we have a representation

$$\mathfrak{z}_1(\mathfrak{p}) = \frac{A(\mathfrak{z}_1(\mathfrak{p}))}{B(\mathfrak{z}_1(\mathfrak{p}))}$$

in which $A(\mathfrak{z}_1(\mathfrak{p})) \mid B(\mathfrak{z}(\mathfrak{p}))$, so that every prime ideal dividing $M(\mathfrak{z}_1(\mathfrak{p}))$ is one of $p_1, \ldots, p_t$.

Siegel ([9], p. 51) proved the following statement:

Let $\mathfrak{K}_0$ be an algebraic function field generated by u and v; let the equation connecting u and v be of order h_0 and have coefficients in an algebraic number field K_0. Let φ be a function

of $\mathfrak{K}_0$ with coefficients in K_0, and suppose that ψ is of order ω_0. Suppose further that ψ is totally bounded on an infinite sequence $\mathfrak{R}$ of K_0-rational points $\mathfrak{p} = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$, where x, y and z are relatively prime integers of K_0. Then if $\varepsilon > 0$, there is a constant c such that

$$(8) \qquad \left| N_{K_0/Q}\left(\frac{\psi(\mathfrak{p})}{A(\psi(\mathfrak{p}))}\right)\right| < cN(|x| + |y| + |z|)^{-\frac{\omega_0}{h_0}+\varepsilon}$$

for all $\mathfrak{p} \in \mathfrak{R}$. Here $\frac{A(\psi(\mathfrak{p}))}{B(\psi(\mathfrak{p}))}$ is a representation for $\psi(\mathfrak{p})$ as a quotient of relatively prime integers in K_0, and the norm on the right indicates the product over the fields conjugate to K_0/Q.

We apply this with $K_0 = K$, $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_n$, $u = \Phi_1$, $v = \Phi_2$, $\psi = \mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}_3$. According to 2), $h_0 \leqq hg^3 n^{2g-2}$, and $\omega_0 = rn^{2g}$, where r is the order of $\mathfrak{z}$ as an element of the original function field $\mathfrak{K}$. Hence (8) becomes

$$(9) \qquad N|\mathfrak{z}_1(\mathfrak{p})| \prod_{\tau=1}^{t} N|\mathfrak{z}_1(\mathfrak{p})|_{p_\tau} < cN(|x| + |y| + |z|)^{-kn^2+\varepsilon}$$

where $k = \frac{r}{hg^3}$ is a constant independent of n. Decreasing k slightly, we can omit the ε in the exponent. Here $|\cdots|_{p_\tau}$ is the p_τ-adic absolute value.

By an elementary argument of Siegel ([9], p. 52), the right side of inequality (9) tends to zero as $\mathfrak{p}$ runs through $\mathfrak{M}_3$. Hence one or more of the factors on the left must also approach zero, and for simplicity we suppose they all do. (Otherwise, certain absolute values can be dropped from further consideration.)

Now (as in [4], § 7) form a function $Z(u, v)$ of the form

$$Z = \frac{1}{a_1 u + a_2 v + a_3}, \qquad a_i \text{ rational integers}$$

with the following properties:

a) $Z(u, v)$ assumes distinct values at the different zeros of $\mathfrak{z}_1$ on $\mathfrak{R}_n$;

b) Z is totally bounded on $\mathfrak{M}_3$, not only as regards $|\cdots|$ but also $|\cdots|_{p_\tau}$ for $\tau = 1, \ldots, t$.

Suppose that on $\mathfrak{R}_n$,

$$(\mathfrak{z}_1) = \frac{\mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{\alpha_s}}{\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_N}, \quad \Sigma \alpha_i = N = rn^{2g}, \ \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j, \ \alpha_i \leqq r.$$

(The final inequality follows from the fact that $\mathfrak{z}_1$ was of order r on $\mathfrak{R}$, and therefore assumed no value more than r-fold. This property persists on $\mathfrak{R}_n$, since $\mathfrak{R}_n/\mathfrak{R}$ is unramified.) Let $Z(\mathfrak{p}_i) = Z_i$, and let $\mathfrak{p}_{i1}, \ldots, \mathfrak{p}_{ih}$ be the places such that $Z(\mathfrak{p}_{ij}) = Z_i$, for $i = 1, \ldots, s$. (Here $\mathfrak{p}_{i1} = \mathfrak{p}_i$.) Put

$$F(Z) = A \prod_{i=1}^{s} (Z - Z_i)^{\alpha_i};$$

for suitable integer $A \in K$ the coefficients of $F(Z)$ are integers in K. $F(Z)$ is of degree N and has no zero of multiplicity greater than r. If on $\mathfrak{R}_n$

$$(Z) = \frac{\mathfrak{r}_1 \cdots \mathfrak{r}_h}{\mathfrak{s}_1 \cdots \mathfrak{s}_h},$$

then

$$\left(\frac{F}{\mathfrak{z}_1}\right) = \frac{\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_N (\mathfrak{p}_{12} \cdots \mathfrak{p}_{1h})^{\alpha_1} \cdots (\mathfrak{p}_{s2} \cdots \mathfrak{p}_{sh})^{\alpha_s}}{(\mathfrak{s}_1 \cdots \mathfrak{s}_h)^N},$$

so that the poles of $\frac{F}{\mathfrak{d}_1}$ are included among those of Z. It follows from b) that $\mathfrak{M}_3$ is bounded away from the poles of $\frac{F}{\mathfrak{d}_1}$ in each of the relevant metrics; in other words, $\frac{F}{\mathfrak{d}_1}$ is totally bounded on $\mathfrak{M}_3$, relative to $|\cdots|$ and all the $|\cdots|_{p_\tau}$. Hence by (9),

$$N|F(Z)|\prod_{\tau=1}^{t} N|F(Z)|_{p_\tau} < cN(|x|+|y|+|z|)^{-kn^2}.$$

At the places of $\mathfrak{M}_3$ put

$$Z(u, v) = \frac{X}{Y},$$

where X and Y are integers of K with $|N(X, Y)|$ bounded. Since

$$Z(u, v) = \frac{z}{a_1x + a_2y + a_3z},$$

we see that $N(|X|+|Y|) < cN(|x|+|y|+|z|)$, so that

$$N\left|F\left(\frac{X}{Y}\right)\right|\prod_{\tau=1}^{t} N\left|F\left(\frac{X}{Y}\right)\right|_{p_\tau} < cN(|X|+|Y|)^{-kn^2}. \tag{10}$$

Essentially the same argument as was used by Mahler [4, pp. 174—5] can now be applied to deduce from (10) that there is a factor F_λ of F, with integral coefficients in K and distinct zeros, such that

$$N\left|F_\lambda\left(\frac{X}{Y}\right)\right|\prod_{\tau=1}^{t} N\left|F_\lambda\left(\frac{X}{Y}\right)\right|_{p_\tau} < cN(|X|+|Y|)^{-kn^2/(t+1)rl}$$

for all $\frac{X}{Y} = Z(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}_3$. Since k, t, r and l are independent of n, it is possible to choose n so as to make the exponent on the right hand side of the last inequality arbitrarily large, numerically. But this conflicts with the p-adic version of Roth's theorem mentioned earlier, so that the supposition is untenable that the theorem to be proved is false.

References.

[1] *D. Hilbert* and *A. Hurwitz*, Über die diophantischen Gleichungen vom Geschecht Null. Acta Math. **14** (1890), 217—224.

[2] *S. Lang*, Some theorems and conjectures in diophantine equations. Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 240—249.

[3] *W. J. Le Veque*, Topics in Number Theory. II. Reading, Mass., 1956.

[4] *K. Mahler*, Über die rationalen Punkte auf Kurven vom Geschlecht Eins. J. für reine und angew. Math. **170** (1933), 168—178.

[5] *K. Mahler*, A remark on Siegel's theorem on algebraic curves. Mathematika **2** (1955), 116—127.

[6] *K. Mahler*, Diophantine approximation. I., to be published by Univ. of Notre Dame Press.

[7] *L. J. Mordell*, On the rational solutions of the indeterminate equations of third and fourth degrees. Proc. Cambridge Phil. Soc. **21** (1922), 179—192.

[8] *D. Ridout*, Rational approximations to algebraic numbers. Mathematika **4** (1957), 125—131.

[9] *C. L. Siegel*, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abh. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1929, Nr. 1.

[10] *A. Weil*, L'arithmétique sur les courbes algébriques. Acta Math. **52** (1929), 281—315.

Eingegangen 27. Oktober 1960.

B_2-Folgen und verwandte Zahlenfolgen.

Von *Fritz Krückeberg* in Bonn[1]).

---

1. In dieser Arbeit werden einige Aussagen über solche Mengen $\mathfrak{B}$ natürlicher Zahlen gemacht, deren Zerfällungsfunktion $p(n; h, \mathfrak{B})$ für festes $h \geqq 2$ und alle natürlichen Zahlen n beschränkt ist. Dabei bedeute $p(n; h, \mathfrak{B})$ die Anzahl der Zerfällungen von n in h Summanden aus $\mathfrak{B}$ ohne Berücksichtigung der Anordnung. Mit $B(m)$ werde die Anzahl aller $b \in \mathfrak{B}$ mit $0 < b \leqq m$ bezeichnet.

In einer Arbeit von Sidon [6] über Fourierreihen trat die Forderung

$$p(n; 2, \mathfrak{B}) \leqq 1 \tag{1}$$

auf. Mengen $\mathfrak{B}$ natürlicher Zahlen, welche (1) erfüllen, werden B_2-Folgen genannt. Sei m eine natürliche Zahl. Durchläuft $\mathfrak{B}$ alle B_2-Folgen, so werde

$$\Phi_2(m) = \operatorname{Max} B(m) \tag{2}$$

gesetzt. Unter Verwendung eines Satzes von Singer [7] zeigten Chowla [1], Erdös und Turán [3], [4], daß

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\Phi_2(m)}{\sqrt{m}} = 1 \tag{3}$$

gilt.

In Verallgemeinerung der B_2-Folgen werde definiert:

Definition. Eine Menge $\mathfrak{B}$ natürlicher Zahlen soll B_h^r-Folge genannt werden, wenn bei festem $h \geqq 2$ und festem $r \geqq 1$ die Ungleichung

$$p(n; h, \mathfrak{B}) \leqq r$$

für alle natürlichen Zahlen n erfüllt ist. (Im Falle $r = 1$ werde statt „B_h^1-Folge" kurz „B_h-Folge" geschrieben.)

2. Es sollen nun Abschätzungen für die entsprechend (2) bei B_h^r-Folgen einführbare Funktion $\Phi_{h,r}(m)$ angegeben werden.

Satz 1. *Sei h eine feste natürliche Zahl, $h \geqq 2$. Sei*

$$\Phi_h(m) = \operatorname{Max} B(m),$$

wobei $\mathfrak{B}$ alle B_h-Folgen durchläuft. Dann gilt

$$\frac{1}{h}\sqrt[h]{h} \leqq \varliminf_{m \to \infty} \frac{\Phi_h(m)}{\sqrt[h]{m}} \leqq \varlimsup_{m \to \infty} \frac{\Phi_h(m)}{\sqrt[h]{m}} \leqq \sqrt[h]{h}\sqrt[h]{h!}. \tag{S 1}$$

Stöhr [8] vermutete, daß im Nenner $\sqrt[h]{m}$ auftritt.

Diese Vermutung über den Verlauf von $\Phi_h(m)$ wird durch Satz 1 bestätigt.

---

[1]) Institut für Instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn.

Satz 2. *Seien h und r feste natürliche Zahlen und $h \geqq 2$, $r \geqq 1$. Sei*

$$\Phi_{h,r}(m) = \operatorname{Max} B(m),$$

wobei $\mathfrak{B}$ alle B_h^r-Folgen durchläuft. Dann gilt

$$\text{(S 2)} \qquad \frac{1}{2h^2} \leqq \varliminf_{m\to\infty} \frac{\Phi_{h,r}(m)}{\sqrt[h]{rm}} \leqq \varlimsup_{m\to\infty} \frac{\Phi_{h,r}(m)}{\sqrt[h]{rm}} \leqq \sqrt[h]{h}\,\sqrt[h]{h!}.$$

Konstruktion (I) *spezieller B_h-Folgen.* Es sei p eine feste Primzahl, h eine feste natürliche Zahl und $p > h \geqq 2$; es durchlaufe i die Zahlen

$$i = 0, 1, 2, \ldots, p-1.$$

Für diese Werte von i bilde man nach folgender Vorschrift eine Folge natürlicher Zahlen b_i:

$$(4) \qquad b_i = (hp)^{h-1}\,\bar{i} - (hp)^{h-2}\,\overline{i^2} - \cdots - (hp)\,\overline{i^{h-1}} - \overline{i^h} + 1.$$

Dabei bedeute $\overline{i^\nu}$ den kleinsten nichtnegativen Rest von i^ν mod p. Nach Konstruktion wächst diese Folge $\{b_i\}$ mit i streng monoton und enthält nur positive Elemente; diese liegen alle unterhalb $h^{h-1} \cdot p^h$, deren Anzahl beträgt p.

Es soll nun gezeigt werden, daß die so konstruierte Folge $\{b_i\}$ eine B_h-Folge ist.

Sei $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_h}$ ein beliebiges aber festes h-Tupel aus Elementen von $\{b_i\}$, für das die Bedingung $b_{i_1} \leqq b_{i_2} \leqq \cdots \leqq b_{i_h}$ erfüllt ist. Es muß dann gezeigt werden, daß die Gleichung

$$(5) \qquad b_{j_1} + \cdots + b_{j_h} = b_{i_1} + \cdots + b_{i_h} \qquad (b_{j_1} \leqq \cdots \leqq b_{j_h})$$

in Zahlen b_{j_ν} aus $\{b_i\}$ nur trivial lösbar ist, d. h. die Summanden auf der linken Seite von (5) mit den entsprechenden Summanden auf der rechten Seite von (5) einzeln der Größe nach übereinstimmen. Laut Konstruktion zieht (5) das folgende Kongruenzensystem nach sich:

$$(6) \qquad \begin{array}{c} j_1 + j_2 + \cdots + j_h \equiv i_1 + i_2 + \cdots + i_h \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ j_1^h + j_2^h + \cdots + j_h^h \equiv i_1^h + i_2^h + \cdots + i_h^h \end{array} \mod p.$$

Nach Sätzen über elementarsymmetrische Funktionen hat dieses Kongruenzensystem nur die triviale Lösung, welche darin besteht, daß die Zahlen $j_1, \ldots, j_h$ bis auf die Reihenfolge mit den Zahlen $i_1, \ldots, i_h$ mod p übereinstimmen. Wegen (4) stimmen damit auch die Zahlen $b_{j_1}, \ldots, b_{j_h}$ mit den Zahlen $b_{i_1}, \ldots, b_{i_h}$ überein, d. h. (5) ist nur trivial lösbar. Die Folge $\{b_i\}$ ist also B_h-Folge.

Konstruktion (II) *spezieller B_h^r-Folgen.* Es sei p eine feste Primzahl, h und r seien feste natürliche Zahlen mit $h \geqq 2$, $r \geqq 1$. Der Zahl r sei in folgender Weise eine natürliche Zahl t zugeordnet:

$$(7) \qquad t = \begin{cases} \left[r^{\frac{1}{h-1}} \cdot h^{\frac{-h}{h-1}}\right] & \text{für } r^{\frac{1}{h-1}} \cdot h^{\frac{-h}{h-1}} \geqq 2 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es durchlaufe i die $t \cdot p$ Zahlen

$$\begin{array}{llll} 0 & , 1 & , \ldots, p-1 & , \\ 0 + & hp,\ 1 + & hp, \ldots, p-1 + & hp, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 + (t-1)\,hp, & 1 + (t-1)\,hp, & \ldots, p-1 + (t-1)\,hp. & \end{array}$$

Für diese Werte von i bilde man nach folgender Vorschrift eine Folge $\{b_i\}$:

$$b_i = (hp)^{h-1}\bar{i} - (hp)^{h-2}\bar{i^2} - \cdots - (hp)\,\overline{i^{h-1}} - \bar{i^h} + 1. \tag{8}$$

Nach Konstruktion wächst diese Folge stark monoton und enthält nur positive Elemente; diese liegen alle unterhalb $t(hp)^h$, deren Anzahl beträgt tp.

Es soll nun gezeigt werden, daß die so konstruierte Folge $\{b_i\}$ eine B_h^r-Folge ist.

Sei $b_{i_1}, \ldots, b_{i_h}$ ein beliebiges aber festes h-Tupel, das die Bedingung $b_{i_1} \leqq \cdots \leqq b_{i_h}$ erfüllt; es muß dann gezeigt werden, daß es höchstens r verschiedene h-Tupel $b_{j_1}, \ldots, b_{j_h}$ mit $b_{j_1} \leqq \cdots \leqq b_{j_h}$ in Zahlen b_{j_v} aus $\{b_i\}$ gibt, für die

$$b_{j_1} + \cdots + b_{j_h} = b_{i_1} + \cdots + b_{i_h} \tag{9}$$

ist. Daher soll hergeleitet werden, daß für die Anzahl s der verschiedenen h-Tupel $b_{j_1}, \ldots, b_{j_h}$, welche (9) erfüllen,

$$s \leqq r \tag{10}$$

gilt. Die in (9) als Index auftretenden Zahlen i_v seien in der Form

$$i_v = \bar{i}_v + e_v \cdot hp,$$

und die Zahlen j_v seien in der Form

$$j_v = \bar{j}_v + e'_v \cdot hp$$

geschrieben. Wegen (8) gilt

$$0 \leqq e_v \leqq t-1; \quad 0 \leqq e'_v \leqq t-1. \tag{11}$$

Wenn (9) erfüllt ist, gilt

$$\begin{aligned} \bar{j}_1 + \cdots + \bar{j}_h + hp \sum_{v=1}^{h} e'_v &= \bar{i}_1 + \cdots + \bar{i}_h + hp \sum_{v=1}^{h} e_v, \\ \bar{j^2} + \cdots + \bar{j_h^2} &= \bar{i^2} + \cdots + \bar{i_h^2}, \\ &\vdots \\ \bar{j^h} + \cdots + \bar{j_h^h} &= \bar{i^h} + \cdots + \bar{i_h^h}. \end{aligned} \tag{12}$$

Umgekehrt folgt (9) aus (12), jedoch nur bis auf die Reihenfolge der $b_{j_1}, \ldots, b_{j_h}$. Betrachtet man das Gleichungssystem (12) mod p, so wird man auf ein Kongruenzensystem der Form (6) geführt, das nur die triviale Lösung besitzt, welche darin besteht, daß die Zahlen $\bar{j}_1, \bar{j}_2, \ldots, \bar{j}_h$ bis auf die Reihenfolge mit den Zahlen $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \ldots, \bar{i}_h$ übereinstimmen. Man findet daher alle verschiedenen Lösungen von (12) (und damit von (9)), indem man alle h-Tupel $e'_1, \ldots, e'_h$ bestimmt, für die

$$\sum_{v=1}^{h} e'_v = \sum_{v=1}^{h} e_v \qquad (e'_1 \leqq e'_2 \leqq \cdots \leqq e'_h) \tag{13}$$

gilt, und zu jedem solchen h-Tupel die höchstens $h!$ Anordnungen von $\bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_h$ bildet. Sei s^* die Anzahl der Lösungen von (13); dann gilt also

$$s \leqq h! \cdot s^*. \tag{14}$$

Nach (11) ist

$$s^* \leqq \max_{w=0,1,\ldots,(t-1)h} p(w; h, \{0, \ldots, t-1\}).$$

Wegen

$$p(n; h, \{0, 1, \ldots, t-1\}) \leqq \binom{n+h-1}{h-1} \leqq \frac{(n+h)^{h-1}}{(h-1)!}$$

gilt

$$s^* \leqq \operatorname*{Max}_{w=0,1,\ldots,(t-1)h} \frac{(w+h)^{h-1}}{(h-1)!} \leqq \frac{(ht)^{h-1}}{(h-1)!}$$

und daher nach (14)

$$s \leqq h^h t^{h-1}. \tag{15}$$

Der Nachweis von (10) wird nun für die beiden Fälle $t \geqq 2$ und $t = 1$ getrennt durchgeführt.

1. $t \geqq 2$. Es gilt $t = \left[r^{\frac{1}{h-1}} h^{\frac{-h}{h-1}}\right]$ wegen (7). Setzt man diesen Wert von t in (15) ein, so findet man: $s \leqq r$.

2. $t = 1$. Hier vereinfacht sich (8), so daß der zuvor behandelte Fall der Konstruktion (I) vorliegt; nach Konstruktion (I) erhält man $s \leqq 1$. Da nach Voraussetzung $r \geqq 1$ ist, gilt $s \leqq r$.

Damit ist gezeigt, daß Konstruktion (II) zu B_h^r-Folgen führt.

Beweis der Sätze 1 *und* 2. Unter Verwendung der Konstruktionen (I) und (II) lassen sich jetzt die Sätze 1 und 2 einfach beweisen.

Beweis von Satz 1. Es seien die Voraussetzungen von Konstruktion (I) für h und p erfüllt. Dann gilt $p \leqq \Phi_h(m)$ nach Konstruktion (I) für $m = h^{h-1} p^h$ und wegen

$$p = \left(\frac{m}{h^{h-1}}\right)^{\frac{1}{h}}$$

ist

$$\frac{1}{h} \cdot \sqrt[h]{h} \leqq \frac{\Phi_h(m)}{\sqrt[h]{m}}.$$

Da der Quotient aufeinanderfolgender Primzahlen gegen 1 strebt und man bei Konstruktion (I) nacheinander alle genügend großen Prinzahlen p zugrundelegen kann, gilt der linke Teil der Ungleichungen (S 1). Sei nun m eine beliebige natürliche Zahl. Jede der Zahlen $1, \ldots, hm$ darf höchstens einmal in der Form

$$b_{i_1} + \cdots + b_{i_h} \qquad (b_{i_1} \leqq \cdots \leqq b_{i_h})$$

dargestellt werden. Daher muß gelten

$$\binom{\Phi_h(m)}{h} \leqq hm.$$

Hieraus folgt

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\Phi_h(m)}{\sqrt[h]{m}} \leqq \sqrt[h]{h}\sqrt[h]{h!}.$$

Damit ist auch der rechte Teil der Ungleichungen (S 1) bewiesen.

Beweis von Satz 2. Nach Konstruktion (II) gilt $tp \leqq \Phi_{h,r}(m)$ für $m = t(hp)^h$ und wegen

$$tp = \frac{1}{h}(mt^{h-1})^{\frac{1}{h}}$$

ist

$$\frac{1}{h}t^{\frac{h-1}{h}} \leqq \frac{\Phi_{h,r}(m)}{\sqrt[h]{m}}.$$

Da nach Konstruktion (II) stets $t \geqq 1$ und nach Voraussetzung $h \geqq 2$ ist, so gilt

$$\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\frac{h-1}{h}} \geqq \frac{1}{2}$$

und damit

$$\frac{1}{2h}(t+1)^{\frac{h-1}{h}} \leqq \frac{\Phi_{h,r}(m)}{\sqrt[h]{m}}. \tag{16}$$

Nach der Definition von t in Konstruktion (II) gilt stets

$$t+1 \geqq r^{\frac{1}{h-1}} h^{\frac{-h}{h-1}}. \tag{17}$$

Aus (17) folgt

$$(t+1)^{\frac{h-1}{h}} \geqq \left(r^{\frac{1}{h-1}} h^{\frac{-h}{h-1}}\right)^{\frac{h-1}{h}} = r^{\frac{1}{h}} h^{-1},$$

so daß man durch Multiplikation von (16) mit $r^{-\frac{1}{h}}$

$$\frac{1}{2h^2} \leqq \frac{\Phi_{h,r}(m)}{\sqrt[h]{rm}} \tag{18}$$

erhält. Da der Quotient aufeinanderfolgender Primzahlen gegen 1 strebt und man bei Konstruktion (II) nacheinander alle genügend großen Primzahlen p zugrunde legen kann, gilt der linke Teil der Ungleichungen (S 2).

Sei nun m eine beliebige natürliche Zahl. Jede der Zahlen $1, 2, \ldots, hm$ darf höchstens r-mal in der Form

$$b_{i_1} + \cdots + b_{i_h} \qquad (b_{i_1} \leqq \cdots \leqq b_{i_h})$$

dargestellt werden. Daher muß gelten

$$\binom{\Phi_{h,r}(m)}{h} \leqq rhm.$$

Hieraus folgt

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\Phi_{h,r}(m)}{\sqrt[h]{rm}} \leqq \sqrt[h]{h}\sqrt[h]{h!},$$

womit auch der rechte Teil der Ungleichungen (S 2) bewiesen ist, so daß damit der Beweis von Satz 2 beendet ist.

3. Zur Untersuchung von $\Phi_h(m)$ beziehungsweise $\Phi_{h,r}(m)$ genügt es, endliche B_h-Folgen (beziehungsweise B_h^r-Folgen) heranzuziehen; es handelt sich um ein „Abschnittsproblem". Daneben interessiert das „universelle" Problem der Abschätzung von $B(m)$ für $m \to \infty$ bei fester unendlicher Zahlenfolge $\mathfrak{B}$.

Hier zeigte Erdös [5], daß es B_2-Folgen gibt, für deren Anzahlfunktion $B(m)$

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{B(m)}{\sqrt[2]{m}} \geqq \frac{1}{2} \tag{19}$$

gilt, und daß andererseits für jede B_2-Folge

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \frac{B(m)}{\sqrt[2]{m}} = 0 \tag{20}$$

ist. Es soll nun ein Konstruktionsprinzip angegeben werden (Satz 3), das den Aufbau einer unendlichen B_2-Folge aus endlichen B_2-Folgen leistet. Anwendung der Konstruktionsvorschrift auf spezielle B_2-Folgen, die man nach einem Satz von Singer [7] bilden kann, führt zu einer etwas schärferen Abschätzung als (19).

Satz 3. *Sei $m_1, m_2, \ldots$ eine stark monoton wachsende unendliche Folge natürlicher Zahlen und*

$$\mathfrak{B}_{m_1},\ \mathfrak{B}_{m_2}, \ldots$$

eine Folge von B_2-Folgen, so daß

$$0 < b \leqq m_i \text{ für alle } b \in \mathfrak{B}_{m_i}$$

gilt. Ferner sei

$$\frac{B_{m_i}}{\sqrt[2]{m_i}} \geqq C > 0,$$

wobei C eine von m_i unabhängige Konstante ist und B_{m_i} die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{B}_{m_i}$ bedeutet. Dann läßt sich mit Hilfe der Folgen

$$\mathfrak{B}_{m_1},\ \mathfrak{B}_{m_2}, \ldots$$

eine unendliche B_2-Folge $\mathfrak{B}$ konstruieren, für deren Anzahlfunktion $B(m)$ folgende Abschätzung gilt:

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{B(m)}{\sqrt[2]{m}} \geqq \frac{\sqrt{2}}{C}. \tag{S 3}$$

Beweis. Sei $e_1, e_2, \ldots$ eine beliebige aber feste Folge positiver reeller Zahlen, die monoton gegen 0 strebt und sei $e_1 \leqq \frac{1}{5}$. Dann wähle man eine Teilfolge $m_{k_1}, m_{k_2}, \ldots$ aus der Folge $m_1, m_2, \ldots$ in der Weise aus, daß

$$m_{k_1} = m_1,\ m_{k_{v+1}} \geqq \frac{16}{e_v^2 C^2} m_{k_v}^2 \text{ für } v = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

gilt. Für die nun folgende Konstruktion werden der Reihe nach die Folgen

$$\mathfrak{B}_{m_{k_1}},\ \mathfrak{B}_{m_{k_2}}, \ldots$$

verwendet. Sei

$$b_i^{(1)} \in \mathfrak{B}_{m_{k_1}},\ b_j^{(2)} \in \mathfrak{B}_{m_{k_2}}.$$

Aus $\mathfrak{B}_{m_{k_2}}$ gehe $\widetilde{\mathfrak{B}}_{m_{k_2}}$ hervor, indem man alle $b_j^{(2)} \leqq 2m_{k_1}$ fortläßt und außerdem alle $b_j^{(2)}$ streicht, die

$$b_{i_1}^{(1)} + b_{j_1}^{(2)} = b_{i_2}^{(1)} + b_{j_2}^{(2)}$$

nichttrivial erfüllen. Für die Anzahl t der zu streichenden Elemente gilt

$$t \leqq 2 \cdot m_{k_1} + B_{m_{k_1}}^2, \tag{22}$$

weil $\mathfrak{B}_{m_{k_2}}$ eine B_2-Folge ist. Da auch $\mathfrak{B}_{m_{k_1}}$ eine B_2-Folge ist, gilt $B^2_{m_{k_1}} \leqq 2 \cdot m_{k_1}$, und daher ist wegen (22)

$$t \leqq 4 \cdot m_{k_1}. \tag{23}$$

Wegen (S 3) und (21) findet man

$$B_{m_{k_2}} \geqq C \cdot \sqrt[2]{m_{k_2}} \geqq \frac{4}{e_1} m_{k_1}. \tag{24}$$

Für die Anzahl $\widetilde{B}_{m_{k_2}}$ der Elemente von $\widetilde{\mathfrak{B}}_{m_{k_2}}$ gilt nach (23) und (24)

$$\widetilde{B}_{m_{k_2}} \geqq B_{m_{k_2}} - 4 \cdot m_{k_1} \geqq (1 - e_1) \cdot B_{m_{k_2}} \geqq (1 - e_1) \cdot C \cdot \sqrt[2]{m_{k_2}}.$$

Man bilde

$$\mathfrak{B}_{m_{k_1}} \cup \left(\widetilde{\mathfrak{B}}_{m_{k_2}} + m_{k_1}\right).$$

Diese Menge ist wieder eine B_2-Folge, und für deren Anzahlfunktion $B(m)$ gilt

$$\frac{B(2 \cdot m_{k_2})}{\sqrt[2]{2 \cdot m_{k_2}}} \geqq (1 - e_1) \frac{C}{\sqrt{2}}.$$

Dieses Verfahren kann man nun fortsetzen. Der nächste Schritt liefert

$$\mathfrak{B}_{m_{k_1}} \cup \left(\widetilde{\mathfrak{B}}_{m_{k_2}} + m_{k_2}\right) \cup \left(\widetilde{\mathfrak{B}}_{m_{k_3}} + m_{k_3}\right),$$

und hierfür gilt

$$\frac{B(2 \cdot m_{k_3})}{\sqrt[2]{2 \cdot m_{k_3}}} \geqq (1 - e_2) \frac{C}{\sqrt{2}}.$$

Führt man diese Konstruktion unbeschränkt weiter, so erhält man, da e_v eine Nullfolge bildet, eine unendliche B_2-Folge $\mathfrak{B}$, deren Anzahlfunktion $B(m)$ die Ungleichung (S 3) erfüllt. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Anwendung von Satz 3 auf solche B_2-Folgen, für die die dort vorausgesetzte Konstante $C = 1$ ist (nach einem Satz von Singer [7] existieren solche endlichen B_2-Folgen) führt auf die Ungleichung

$$\varlimsup_{m \to \infty} \frac{B(m)}{\sqrt[2]{m}} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{25}$$

d. h. es gibt unendliche B_2-Folgen, für die (25) richtig ist.

Ein anderes rekursives Verfahren zur Bildung einer speziellen unendlichen B_2-Folge geben Chowla und Mian [2] an:

Man setze $b_1 = 1$ und wähle, wenn $b_1, \ldots, b_v$ bereits festgelegt sind, für b_{v+1} die kleinste natürliche Zahl, die von allen Zahlen $b_r + b_s - b_t$ mit $1 \leqq r, s, t \leqq v$ verschieden ist. Mian und Chowla vermuteten, daß die so konstruierte B_2-Folge eine besonders stark anwachsende Anzahlfunktion $B(m)$ besitzt, so daß

$$b_v \leqq v^2 \tag{26}$$

gilt. Die ersten Glieder der Folge erfüllen tatsächlich Ungleichung (26). Eine numerisch durchgeführte Berechnung [2]) ergab, daß Ungleichung (26) für alle b_v mit $290 \leqq b_v \leqq 250000$ verletzt wird. Auf Grund der numerischen Berechnung liegt die Vermutung nahe, daß $B(m)$ wesentlich schwächer wächst als $\sqrt[2]{m}$.

[2]) Die Berechnung wurde auf dem Elektronischen Rechenautomaten ER 56 des Instituts für Instrumentelle Mathematik, Bonn, durchgeführt.

Es bleibt die Frage offen, auf welche Weise B_2-Folgen konstruiert werden können, die zu einer schärferen Abschätzung als (25) führen, und welche entsprechenden Ergebnisse bei unendlichen B_h-Folgen beziehungsweise B'_h-Folgen erreichbar sind.

Literaturverzeichnis.

[1] *S. Chowla*, Solution of a problem of Erdös and Turán in additive number theory. Proc. Nat. Acad. Sci. India, Sect. A **14** (1944), 1—2. sowie: Proc. Lahore Philos. Soc. **6** (1944), 13—14.

[2] *S. Chowla* and *A. M. Mian*, On the B_2 sequences of Sidon. Proc. Nat. Acad. Sci. India, Sect. A **14** (1944), 3—4.

[3] *P. Erdös* and *P. Turán*, On a problem of Sidon in additive number theory, and some related problems. Journ. London Math. Soc. **16** (1941), 212—215.

[4] *P. Erdös*, On a problem of Sidon in additive number theory, and some related problems. Journ. London Math. Soc. **19** (1944), 208.

[5] *P. Erdös*, Briefliche Mitteilung an A. Stöhr, veröffentlicht in: A. Stöhr, Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. II. Journ. reine u. angew. Math. **194** (1955), 132—133.

[6] *S. Sidon*, Ein Satz über Fouriersche Reihen mit Lücken. Math. Zeitschrift **34** (1932), 481—484.

[7] *J. Singer*, A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), 377—385.

[8] *A. Stöhr*, Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. II. Journ. reine angew. Math. **194** (1955), 132—133.

Eingegangen 1. November 1960.

Über einige Probleme der additiven Zahlentheorie.

Von *P. Erdös* in Budapest.

Es seien $0 = a_0 < a_1 \cdots$; $0 = b_0 < b_1 < \cdots$ Folgen ganzer Zahlen,

$$A(m) = \sum_{1 \leq a_i \leq m} 1, \quad B(m) = \sum_{1 \leq b_i \leq m} 1.$$

Die Schnirelmannsche Dichte der Folge $\{a_i\}$ im Intervall $(1, N)$ (wo N auch unendlich sein kann) ist die größte Zahl α, für welche

$$A(m) \geqq \alpha m \tag{1}$$

für alle $m \leqq n$ gilt.

Die Folge $\{b_i\}$ nennt Khintchine eine wesentliche Komponente, wenn für jede Folge der Dichte α $(0 < \alpha < 1)$ die Dichte der Zahlen von der Form $\{a_i + b_j\}$ größer als α ist. Khintchine[1]) zeigte, daß die Quadratzahlen eine wesentliche Komponente sind. Ich[2]) bewies, daß jede Basis eine wesentliche Komponente ist (eine Folge $\{b_j\}$ wird eine Basis r-ter Ordnung genannt, wenn sich jede ganze Zahl als Summe von r oder weniger b's darstellen läßt; z. B. bilden die k-ten Potenzen der Primzahlen eine Basis für jedes k). Genauer zeigte ich, daß die Dichte der Folge $\{a_i + b_j\}$ mindestens

$$\alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2r} \tag{2}$$

ist. Der wichtigste Schritt beim (sehr einfachen) Beweis von (2) war folgender:

Lemma. *Es sei $f(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ die größte Zahl mit folgender Eigenschaft: $a_1 < a_2 < \cdots$ sei eine beliebige Folge der Dichte α, und zu jedem n existiere ein $k = k(n)$, so daß die Anzahl der verschiedenen Zahlen $\leqq n$ in der Folge $\{a_i, a_i + k\}$ größer oder gleich $(\alpha + f(\alpha))\, n$ ist. Dann gilt*

$$f(\alpha) \geqq \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}. \tag{3}$$

Ich zeigte dann noch in meiner Arbeit, daß (2) mit $\alpha + \dfrac{f(\alpha)}{r}$ wahr ist. Verschiedene Autoren haben (2) und (3) verschärft[3]). Ich vermutete $f(\alpha) \geqq \alpha(1-\alpha)$, werde aber

[1]) *A. Khintchine*, Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie, Mat. Sbornik **40** (1933), 180—189, siehe auch *A. Buchstab*, ibid. 190—195.

[2]) *P. Erdös*, On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers, Acta Arithmetica **1** (1936), 197—200.

[3]) Siehe z. B. *E. Landau*, Über einige Fortschritte der additiven Zahlentheorie, Cambridge 1937, 3—6 und 60—63; *A. Brauer*, Über die Dichte der Summe zweier Mengen, deren eine von positiver Dichte ist, Math. Zeitschrift **44** (1939), 212—232; *S. Selberg*, Metrical problem in the additive theory of numbers, Arch. Math. Naturvidensk. **47** (1941), 111—118; *F. Kasch*, Abschätzung der Dichte von Summenmengen, Math. Zeitschrift **66** (1956), 164—172; *H. Plünnecke*, Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie, Journal reine und angew. Math. **197** (1957), 97—103.

jetzt mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Mitteln zeigen, daß dies für jedes α falsch ist (es ist demnach möglich, daß (2) mit $\alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{r}$ wahr ist). $f(\alpha)$ kann ich aber für kein einziges α bestimmen. Ich kann zeigen, daß eine absolute Konstante c_1 existiert, so daß

$$f(\alpha) < \alpha(1-\alpha) - c_1(\min(\alpha, 1-\alpha))^{3/2} \tag{4}$$

gilt. Wenn $\alpha < \frac{1}{2}$ ist, so gilt also

$$f(\alpha) < \alpha - c_1\alpha^{3/2}.$$

Für kleine Werte von α ist dies die genaue Größenordnung für $f(\alpha)$. A. Brauer[3]) beweist nämlich, daß (2) mit $\alpha + \frac{\alpha(1-\alpha^{1/2})}{r}$ wahr ist, und vielleicht kann man durch seine Schlußweise

$$f(\alpha) > \alpha - \alpha^{3/2} \tag{5}$$

zeigen. Jedenfalls gibt seine Methode sofort

$$f(\alpha) > \alpha - 2\alpha^{3/2}. \tag{6}$$

Da weder (5) noch (6) explizit bei Brauer steht — er war nur an der Verschärfung von (2) interessiert —, werden wir (6) durch die Brauersche Schlußweise beweisen.

Ein ähnliches Problem ist das folgende: Es seien $1 \leqq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leqq 2n$ irgend n ganze Zahlen, $d_1, d_2, \ldots d_n$ die anderen Zahlen $\leqq 2n$. Es sei M_k die Lösungszahl der Gleichung $a_i - d_j = k$, also

$$M_k = \sum_{a_i - d_j = k} 1.$$

Es sei

$$M^{(n)} = \min \max_{-2n \leqq k \leqq 2n} M_k,$$

wo man das Minimum über alle Folgen $1 \leqq a_1 < \cdots < a_n \leqq 2n$ nehmen muß. Ich zeigte[4]) (sehr leicht) $M^{(n)} \geqq \frac{n}{4}$, Scherk verschärfte dies zu $M^{(n)} > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) n$ und Swierczkowski[5]) bewies $M^{(n)} > \frac{4-\sqrt{6}}{5} n$. Schließlich zeigte Moser[6]) durch eine sehr sinnreiche Methode $M^{(n)} > \frac{\sqrt{2}}{4}(n-1)$, und er kann durch eine längere Rechnung $M^{(n)} > \sqrt{4-\sqrt{15}}\,(n-1)$ beweisen.

Ich vermutete $M^{(n)} \geqq \frac{n}{2}$, jedoch widerlegte ich dies durch wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen[6]), indem ich $M \leqq \frac{4}{9} n$ für genügend großes n bewies. Unabhängig zeigten Selfridge, Motzkin und Rolston[6]) mit Hilfe der elektronischen Maschine Swac, daß $M^{(15)} = 6$ ist, und man kann daraus leicht $M^{(n)} \leqq 0{,}4n$ für unendlich viele n folgern. Moser konnte dieses Resultat noch etwas verschärfen, aber der genaue Wert von $M^{(n)}$ ist noch nicht bekannt.

---

[4]) *P. Erdös*, Some remarks on number theory (in hebräischer Sprache), Riveon lematematika **9** (1955), 45—48.

[5]) *S. Swierczkowski*, On the intersection of a linear set with the translation of its complement, Coll. Math. **5** (1958), 185—197.

[6]) *L. Moser*, On the minimal overlap problem of Erdös, Acta Arithmetica **5** (1959), 117—119.

Man kann diese Frage noch etwas verallgemeinern. Es sei G eine Gruppe mit n Elementen. $a_1, a_2, \ldots, a_l$, $l = \left[\frac{n}{2}\right]$ seien l beliebige Elemente von G und $d_1, d_2, \ldots, d_{n-l}$ die $n - l$ anderen Elemente von G. Es ist leicht zu sehen, daß es immer ein Element x von G gibt, so daß die Lösungszahl von $a_i x = d_j$ mindestens $\left[\frac{n}{4}\right] + 1$ ist. Dies folgt sofort aus der Bemerkung, daß $l(n-l)$ die Anzahl der Elemente der Form $a_i^{-1} d_j$ ist, und da das Einselement nicht von der Form $a_i^{-1} d_j$ ist, es mindestens ein x gibt für welches die Lösungszahl von $a_i x = d_j$ größer oder gleich $\left\{\frac{l(n-l)}{n-1}\right\} = \left[\frac{n}{4}\right] + 1$ ist ($\{x\}$ sei die kleinste ganze Zahl $\geqq x$). Wenn G die additive Gruppe der Restklassen mod p ist und die a's die quadratischen Reste sind, so ist die Lösungszahl von $a_i + k = d_j$ bekanntlich höchstens $\left[\frac{p}{4}\right] + 1$, also die obige Abschätzung ist hier scharf. Ich weiß aber nicht, ob $\left[\frac{n}{4}\right] + 1$ sich nicht für gewisse Gruppen doch wesentlich verschärfen läßt. Man kann durch wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zeigen, daß eine Konstante c so existiert, daß man in jeder Gruppe von n Elementen $l = \left[\frac{n}{2}\right]$ Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_l$ finden kann, für die die Lösungszahl von $a_i x = d_j$ für jedes x kleiner als $\frac{n}{4} + c\,(n \log n)^{1/2}$ ausfällt.

Dies zeigt, daß $\left[\frac{n}{4}\right]$ doch eine ziemlich gute untere Abschätzung ist.

Linnik[7]) zeigte als erster, daß nicht jede wesentliche Komponente eine Basis sein muß. Kürzlich wurde dies viel einfacher von Stöhr und Wirsing[8]) bewiesen. Für Linniks wesentliche Komponente gilt aber $B(n) = O(n^\varepsilon)$ und nach seiner mündlichen Mitteilung kann er sogar eine wesentliche Komponente mit $B(n) < \exp(n^{1-\varepsilon})$ konstruieren. Ich vermute, daß für eine wesentliche Komponente $\frac{B(n)}{\log n} \to \infty$ gelten muß. Ein spezieller Fall dieser Vermutung ist, daß eine Folge b_k mit $b_{k+1} > (1 + c)\, b_k$ keine wesentliche Komponente sein kann. Dies kann ich aber nicht beweisen.

Schließlich möchte ich noch eine Frage stellen. Gibt es eine Funktion $g(\alpha) > 0$, $0 < \alpha < 1$ und eine Folge $b_1 < b_2 < \cdots$, die keine Basis ist, so daß, wenn a_i eine Folge der Dichte α ist, zu jedem n ein $b_j = b_j(n)$ so existiert, daß die Anzahl der verschiedenen Zahlen $\leqq n$ in der Folge $\{a_i, a_i + b_j\}$ größer als $(\alpha + g(\alpha))\, n$ ist? Wenn b_i eine Basis r-ter Ordnung ist, so zeigte ich[2]), daß $g(\alpha) \geqq \frac{\alpha(1-\alpha)}{2r}$ gilt.

Nun beweisen wir

Satz 1.

$$f(\alpha) < \alpha(1 - \alpha).$$

Es sei $\varepsilon > 0$ eine von α abhängige Zahl und η sei klein im Vergleich zu ε und α. Wir definieren Folgen im Intervall $(1, n)$ durch folgende wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen. Im Intervall $\left(1, \frac{n}{2}\right)$ gehöre eine Zahl u zu unserer Folge mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha + \varepsilon + \eta$ und im Intervall $\left(\frac{n}{2}, n\right)$ mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha - \varepsilon$.

---

[7]) *W. V. Linnik*, On Erdös's theorem on the addition of numerical sequences, Mat. Sbornik N. S. **10** (52) (1942), 67—78.

[8]) *A. Stöhr* und *E. Wirsing*, Beispiele von wesentlichen Komponenten, die keine Basen sind, Journal reine u. angew. Math. **196** (1956), 96—98.

Die Zahlen sollen unabhängig voneinander gewählt werden. Es folgt aus bekannten Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Satz der großen Zahlen), daß eine Konstante $C = C(\alpha, \varepsilon, \eta)$ so existiert, daß mit einer Wahrscheinlichkeit größer als C die Dichte unserer Folge größer als α wird, daß aber $A(n) < (\alpha + 2\eta)\, n$ ausfällt. Anstatt dieser Konstruktion könnte man folgendes kombinatorische Modell betrachten. Im Intervall $\left(1, \frac{n}{2}\right)$ wählen wir auf alle möglichen Arten $l_1 = \left[\left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon + \eta\right) n\right]$ Zahlen, und im Intervall $\left(\frac{n}{2}, n\right)$ wählen wir auf alle möglichen Arten $\left[(\alpha - \varepsilon)\frac{n}{2}\right] = l_2$ Zahlen. Offenbar kann man diese Zahlen auf

$$\binom{\left[\frac{n}{2}\right]}{l_1}\binom{n - \left[\frac{n}{2}\right]}{l_2} = N \tag{7}$$

Arten wählen. Nun folgt durch naheliegende, aber etwas mühsame kombinatorische Betrachtungen, daß für mindestens CN dieser Folgen ihre Dichte größer als α ist.

Es sei jetzt k eine beliebige Zahl $\leqq n$, und $E(u)$ sei die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $e(u)$, daß $u \in A$ und $u + k \in D$ ist. (Die Folge D besteht aus den Zahlen $d_i \leqq n$, die nicht in der Folge A sind). Wir wollen nun $\sum\limits_{u=1}^{n-k} E(u)$ von oben abschätzen (für $u > n - k$ ist $u + k > n$, also $E(u) = 0$). Offenbar gilt

$$\sum_{u=1}^{n-k} E(u) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \tag{8}$$

mit $1 \leqq u \leqq \frac{n}{2} - k$ in Σ_1, $\frac{n}{2} - k < u \leqq \frac{n}{2}$ in Σ_2 und $\frac{n}{2} < u \leqq n - k$ in Σ_3 (wenn $k > \frac{n}{2}$ ist, so ist natürlich $\Sigma_3 = 0$). Für $1 \leqq u \leqq \frac{n}{2} - k$ ist die Wahrscheinlichkeit für $u \in A$ gleich $\alpha + \varepsilon + \eta$ und für $u + k \in D$ gleich $1 - \alpha - \varepsilon - \eta$. Da diese beiden Ereignisse offenbar unabhängig sind, gilt

$$\Sigma_1 = \left(\frac{n}{2} - k\right)(\alpha + \varepsilon + \eta)(1 - \alpha - \varepsilon - \eta).$$

Durch denselben Gedankengang folgt

$$\Sigma_2 = k(\alpha + \varepsilon + \eta)(1 - \alpha + \varepsilon),\ \Sigma_3 = \left(\frac{n}{2} - k\right)(\alpha - \varepsilon)(1 - \alpha + \varepsilon).$$

Also ist wegen (8)

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^{n-k} E(u) &= (n - 2k)\left(\alpha - \alpha^2 - \varepsilon^2 - \alpha\eta - \varepsilon\eta + \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{2}\right) \\ &\quad + k(\alpha + \varepsilon + \eta - \alpha^2 - \eta\alpha + \eta\varepsilon + \varepsilon^2) \\ &< n\left(\alpha - \alpha^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right), \end{aligned} \tag{9}$$

wenn $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ und $\eta = \eta(\alpha, \varepsilon)$ genügend klein sind.

Jetzt wollen wir zeigen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

$$\sum_{e(u)\ \text{wahr}} 1 > n\left(\alpha - \alpha^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \tag{10}$$

gilt, kleiner als $(1 + c_2)^{-n}$ ist, wo $c_2 = c_2(\alpha, \varepsilon) > 0$ ist. Dies würde wegen (9) sofort aus der Bernsteinschen Ungleichung[9]) folgen, wenn die Ereignisse $e(u)$ unabhängig wären.

[9]) Siehe z. B. *I. V. Uspensky*, Introduction to mathematical probability, New York u. London, 1937, 204—205.

$e(u)$ und $e(u+k)$ schließen sich aber offenbar aus, sind also nicht unabhängig. Wir teilen jetzt die Ereignisse $e(u)$ in zwei Klassen ein. In der ersten Klasse sind die u's $(1 \leqq u \leqq n-k)$ mit

$$u = 2lk + r, \quad l = 0, 1, \ldots; \; 0 \leqq r < k$$

und in der zweiten Klasse die u's $(1 \leqq u \leqq n-k)$ mit

$$u = (2l+1)\,k + r, \quad l = 0, 1, \ldots; \; 0 \leqq r < k.$$

Offenbar sind die Ereignisse in derselben Klasse unabhängig, da die Differenz zweier Zahlen in derselben Klasse niemals gleich k ist. Wenn nun (10) gilt, muß wegen (9) für mindestens eine der Klassen

$$\sum_{e(u)\text{ wahr}} 1 > \sum E(u) + \frac{\varepsilon^2 n}{8} \tag{11}$$

gelten — hier läuft die Summation über die Zahlen derselben Klasse.

Da die Ereignisse derselben Klasse unabhängig sind, folgt aus der Bernsteinschen Ungleichung, daß die Wahrscheinlichkeit von (11) und also auch von (10) kleiner als $(1+c_k)^{-n}$ ist. Da für k höchstens n Werte in Betracht kommen, erhalten wir, daß die Wahrscheinlichkeit, daß es ein k, $1 \leqq k \leqq n$ gibt, für welches (10) gilt, kleiner als

$$n(1+c_2)^{-n} = o(1) \tag{12}$$

ist. Nach der Bemerkung am Anfang unseres Beweises ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß unsere Folge die Dichte α hat und $A(n) < (\alpha + 2\eta)\,n$ befriedigt, größer als C. Daher folgt aus (12), daß für $n > n_0$ die Wahrscheinlichkeit für die Existenz einer Folge $a_1 < a_2 < \cdots$ der Dichte α, bei der für jedes k die Anzahl der Zahlen $\leqq n$ in der Folge $\{a_i, a_i + k\}$ kleiner als

$$n(\alpha + 2\eta) + n\left(\alpha - \alpha^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) < n\left(\alpha(1-\alpha) - \frac{\varepsilon^2}{8}\right) \quad (\eta < \eta(\varepsilon))$$

ausfällt, gleich $C - o(1) > \frac{C}{2}$ ist. Also folgt, daß eine solche Folge existiert, und somit ist unser Satz bewiesen.

Man könnte den Beweis auch leicht mit Hilfe unseres kombinatorischen Modells führen, nur sind die Rechnungen etwas umständlich, der Vorteil aber ist, daß man keine wahrscheinlichkeitstheoretischen Sätze und Begriffe braucht. Es sei N_k die Anzahl der nach unserer Vorschrift gebildeten Folgen $a_1 < a_2 < \cdots < a_u \leqq n$, $u = [n(\alpha+\eta)]$, für welche die Anzahl der Zahlen $\leqq n$ von der Form $a_i + k$, die nicht in der Folge a_i vorkommen, größer als $n(\alpha(1-\alpha) - 2\eta)$ ist. Man kann durch naheliegende, aber ziemlich umständliche Abschätzungen von Binomialkoeffizienten zeigen, daß für genügend kleines $\eta = \eta(\varepsilon, \alpha)$

$$N_k < N(1+c_2)^{-n} \tag{13}$$

ist. Also gilt wegen (13)

$$\sum_{k=1}^{n} N_k = o(N).$$

Wegen (7) existieren daher $(C - o(1))\,N > \frac{C}{2}\,N$ Folgen der Dichte α, für welche die Anzahl der verschiedenen Zahlen $\leqq n$ der Folge $\{a_i, a_i + k\}$ für jedes k kleiner als $n(\alpha(1-\alpha) - \eta)$ ist, und dies beweist wieder unseren Satz.

Nun wollen wir noch den Beweis von (4) skizzieren. Es sei zuerst $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$; wir können annehmen, daß α klein ist. Hier definieren wir unsere Folgen durch folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung: Im Intervall $(1, \alpha^{1/2} n)$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß die

Zahl u in unserer Folge vorkommt, gleich $\frac{\alpha^{1/2}}{2} + \eta$, wo η klein im Vergleich zu α ist. Im Intervall $(\alpha^{1/2} n, n)$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß u in A vorkommt, gleich $\frac{\alpha}{2}(1 - \alpha^{1/2})^{-1}$. Für $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $\delta = 1 - \alpha$ (wir können annehmen, daß δ klein ist) sei im Intervall $(n(1 - \delta^{1/2}), n)$ die Wahrscheinlichkeit, daß u nicht zu A gehört, gleich $\frac{\delta^{1/2}}{2} - \eta$ und im Intervall $(1, n(1 - \delta^{1/2})$ gleich $\frac{\delta}{2}(1 - \delta^{1/2})^{-1}$. Von diesem Punkt an ist nun der Beweis von (4) ähnlich dem Beweise von Satz 1 und kann unterdrückt werden.

Jetzt wollen wir noch den Beweis von (6) skizzieren. Es sei $a_1 < a_2 < \cdots$ eine Folge der Dichte α. Wir können annehmen, daß $A(n) < 2\alpha n$ gilt (wenn nicht, so ist (6) schon mit $k = 0$ erfüllt). Wir bezeichnen mit $L(n)$ die Lösungsanzahl von

$$a_i + x = d_j, \; 0 < x \leqq [\alpha^{1/2} n] = T.$$

Offenbar gilt, falls $D(m) = m - A(m)$ die Anzahl der $d_i \leqq m$ bedeutet,

$$\begin{aligned} L(n) &\geqq \sum_{a_i \leqq n - T} (D(a_i + T) - D(a_i)) \geqq A(n - T)\,(T - A(n)) \\ &\geqq \alpha(n - T)\,(T - A(n)) \end{aligned} \tag{14}$$

wegen $D(a_i + T) - D(a_i) \geqq T - A(n)$. Aus (14) folgt aber: Für ein $k \leqq T$ ist die Anzahl der Zahlen $a_i + k \leqq n$, die nicht in A vorkommen, mindestens

$$\frac{\alpha(n - T)\,(T - A(n))}{T}. \tag{15}$$

Also ist für dieses k die Anzahl der Zahlen $\leqq n$ in der Folge $\{a_i, a_i + k\}$ größer oder gleich

$$A(n) + \frac{\alpha(n - T)\,(T - A(n))}{T}. \tag{16}$$

Es ist leicht zu sehen, daß (16) für $A(n) = \alpha n$ ein Minimum wird $(A(n) \geqq \alpha n)$, und eine leichte Rechnung zeigt, daß

$$A(n) + \frac{\alpha(n - T)\,(T - A(n))}{T} > (\alpha - 2\alpha^{3/2})\, n$$

ist, was zu beweisen war.

Eingegangen 3. November 1960.

Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades.

Von *Eduard Wirsing* in Braunschweig.

---

1. Der Satz, daß jede reelle Irrationalzahl ξ unendlich viele rationale Näherungen $\frac{p}{q}$ besitzt, für die

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\text{const}}{q^2}$$

ist, gibt unter anderem zu zwei allgemeineren Approximationsaufgaben Anlaß.

Das Maximum der Beträge $|a_\nu|$ heißt die *Höhe des Polynoms* $P(x) = \sum_\nu a_\nu x^{n-\nu}$ und werde mit $\| P \|$ bezeichnet. Ist α eine algebraische Zahl und P ihr Minimalpolynom, so heiße $\| P \|$ auch *Höhe von* α, $\| \alpha \|$.

Für eine gegebene Zahl ξ wird nun erstens nach dem größten Exponenten $w_n(\xi)$ gefragt, für den

$$0 < |P(\xi)| \leqq \frac{1}{\| P \|^{w_n - \varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0, \textit{ beliebig})$$

durch unendlich viele Polynome von höchstens n-tem Grade mit ganzrationalen Koeffizienten befriedigt wird.

Zweitens sei $w_n^*(\xi)$ der größte Exponent, für den

$$|\xi - \alpha| \leqq \frac{1}{\| \alpha \|^{1 + w_n^* - \varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0, \textit{ beliebig})$$

durch unendlich viele algebraische Zahlen von höchstens n-tem Grade gelöst wird.

Für $n = 1$ fällt dies mit der ersten Aufgabe zusammen, d. h. es ist $w_1^*(\xi) = w_1(\xi)$.

Auf den Größen $w_n(\xi)$ baut Mahler [4] seine Klassifikation der Zahlen auf. Koksma [3] verwendet $w_n^*(\xi)$ zum gleichen Zweck und erhält eine zur Mahlerschen äquivalente Klasseneinteilung. Er verzichtet dabei allerdings auf die Einordnung der algebraischen Zahlen ξ.

Es sei s der Grad von ξ, falls ξ algebraisch, und $s = \infty$, falls ξ transzendent ist. Die Charakterisierung der algebraischen Zahlen bei Mahler beruht dann auf den Abschätzungen (*ξ sei vorläufig reell angenommen*)

$$(1) \qquad w_n(\xi) \leqq s - 1,$$

$$(2) \qquad w_n(\xi) \geqq n \qquad \textit{für } n < s,$$

nach denen bei algebraischem ξ

$$w_n(\xi) = O(1) \qquad (n \to \infty),$$

bei transzendentem ξ dagegen

$$w_n(\xi) \to \infty$$

gilt. (1) beruht im wesentlichen darauf, daß die Resultante der Minimalpolynome von approximierender und approximierter Zahl ganzrational und nicht Null ist; (2) folgt aus Minkowskis Linearformensatz.

Während sich (1) auf $w_n^*(\xi)$ überträgt, da stets

$$w_n^*(\xi) \leqq w_n(\xi) \tag{3}$$

ist, kennt man für $w_n^*(\xi)$ bisher keine zu (2) analoge Abschätzung. Ein solches Analogon ist das Hauptziel der vorliegenden Arbeit:

$$w_n^*(\xi) \geqq \frac{n+1}{2} \qquad (n < s,\ \xi \text{ reell}); \tag{4}$$

d. h. also: *Jede reelle Zahl ξ, die nicht algebraisch von einem Grad $\leqq n$ ist, läßt sich bei beliebigem $\varepsilon > 0$ durch unendlich viele algebraische Zahlen α von höchstens n-tem Grad so approximieren, daß*

$$|\xi - \alpha| \leqq \|\alpha\|^{-\frac{n+3}{2}+\varepsilon}$$

ist. $w_n^*(\xi) = O(1)$ für $n \to \infty$ charakterisiert also die algebraischen Zahlen ebenso wie $w_n(\xi) = O(1)$, und Koksmas Klassifikation ist demnach auch in diesem Punkt mit der von Mahler gleichwertig.

2. Allgemeiner interessieren wir uns für Abschätzungen von $w_n^*(\xi)$ durch $w_n(\xi)$ und erhalten folgende Ergebnisse *für reelles ξ und $n < s$*:

$$w_n^* \geqq w_n - n + 1, \tag{5}$$

$$w_n^* \geqq \frac{1}{2}(w_n + 1), \tag{6}$$

$$w_n^* \geqq \frac{w_n}{w_n - n + 1}. \tag{7}$$

Die Ungleichung (5) tritt in verdeckter Gestalt (Hilfssatz 19) schon bei Schneider [5] in dem Paragraphen über Mahlers Vermutung auf, nach welcher $w_n(\xi) = n$ für $n = 1, 2, \ldots$ und fast alle reellen ξ (im Sinne von Lebesgue) gelten soll. Aus dem dortigen Beweis ist auch der hier gegebene durch einige Vereinfachungen entwickelt. Dazu wird die Diskriminante eines Approximationspolynoms betrachtet.

Eine kleine Veränderung des Beweises liefert

$$w_n^*(\xi) \geqq \frac{2}{3} w_n(\xi) - \frac{n}{3} \qquad (\xi \textit{ reell},\ n < s) \tag{8}$$

mit der Folgerung

$$w_n^*(\xi) \geqq \frac{n}{3} \qquad (\xi \textit{ reell},\ n < s).$$

(8) ist zwar schwächer als (6), soll aber des einfacheren Beweises wegen ausgeführt werden[1]).

[1]) Zur Zeit des Oberwolfach-Vortrages war (8) mein bestes Ergebnis.

(6) ist besonders wegen der Folgerung (4) wichtig, die sich mit (2) sofort daraus ergibt. Der Beweis ist dem von (5) und (8) ähnlich; es wird die Resultante zweier Approximationspolynome dafür untersucht.

Die Abschätzung (7) ist nur von Interesse, wenn $w_n(\xi)$ wenig größer als n ist, da (5) bzw. (6) sonst besser sind. Wird (7) mit (6) kombiniert, so kommt man zu einer leichten Verschärfung von (4):

$$w_n^*(\xi) \geqq \frac{n+2}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{n^2+4n-4}. \tag{9}$$

Ferner folgt aus (7) zusammen mit (3): *Ist ξ reell und $w_n(\xi) = n$, so ist auch $w_n^*(\xi) = n$.* Speziell erhalten wir nun mit (1) und (2)

$$w_{s-1}^*(\xi) = w_{s-1}(\xi) = s-1.$$

Geht man die Beweise im einzelnen durch, so erhält man ohne zusätzliche Schwierigkeiten den schärferen Satz (dessen erster Teil wohlbekannt ist):

Ist ξ reell und algebraisch vom Grade s, so gilt für alle algebraischen Zahlen α von kleinerem als dem s-ten Grad

$$|\xi - \alpha| \geqq c_1(\xi)\, \|\alpha\|^{-s} \qquad (c_1 > 0)$$

und für unendlich viele solche α

$$|\xi - \alpha| \leqq c_2(\xi)\, \|\alpha\|^{-s} \qquad (c_2 < \infty).$$

Zum Beweis von (7) werden Approximationspolynome betrachtet, deren Koeffizienten solche Einschränkungen auferlegt sind, daß in der Umgebung von ξ nur eine Nullstelle liegen kann. Leider wird die Güte der Näherung von $P(\xi)$ an Null durch die Nebenbedingung stark beeinträchtigt.

Auch (9) ließe sich noch verbessern. Da die Verbesserung aber geringfügig ist und kein Grund besteht, anzunehmen, daß man mit (4) und (9) schon in der Nähe der bestmöglichen Schranke ist, soll darauf nicht eingegangen werden. Vielleicht gilt sogar stets $w_n^*(\xi) \geqq n$ für $n < s$ und reelles ξ. Wenn die erwähnte Mahlersche Vermutung richtig ist, trifft dies ja nach (7) wenigstens für fast alle reellen ξ zu.

3. Für *nichtreelle Zahlen* ξ liegen die Verhältnisse ganz ähnlich. Die Analoga für die im reellen Fall erwähnten Beziehungen lauten hier:

$$w_n \leqq \frac{s-2}{2}, \tag{1'}$$

$$w_n \geqq \frac{n-1}{2} \qquad (n < s). \tag{2'}$$

Dazu treten als Ergebnisse der vorliegenden Arbeit für $n < s$:

$$w_n^* \geqq w_n - \frac{n-1}{2}, \tag{5'}$$

$$w_n^* \geqq \frac{1}{2} w_n, \tag{6'}$$

$$w_n^* \geqq \frac{w_n}{2w_n - n + 2}. \tag{7'}$$

Aus (6′) und (7′) folgt

$$w_n^*(\xi) \geqq \frac{n}{4} \qquad (n < s), \tag{4'}$$

aus (1′), (2′), (3), (7′):

$$w_{s-1}^*(\xi) = w_{s-1}(\xi) = \frac{s-2}{2}.$$

4. Bezeichnungen. *Für nichtnegative Größen A, B schreiben wir $A \ll B$ oder $B \gg A$, wenn $A \leqq \text{const} \cdot B$ ist. Dabei darf die Konstante im folgenden stets von ξ und den Graden der approximierenden Zahlen bzw. Polynome abhängen, dagegen nicht von deren Höhen.*

Gilt $A \ll B$ und $A \gg B$, so schreiben wir $A \asymp B$.

Es sei $s = \text{grad}\, \xi$, falls ξ algebraisch ist, und sonst $s = \infty$.

Bezüglich $\| P \|$, $\| \alpha \|$, $w_n(\xi)$, $w_n^*(\xi)$ siehe die Einleitung.

Hilfssatz 1. *Das Polynom $P(x) = \sum_0^n a_\nu x^{n-\nu} = a_0 \prod_1^n (x - \alpha_\nu)$ habe beliebige komplexe Koeffizienten (abgesehen von $a_0 > 0$). Dann ist*

$$a_0 \prod_{|\alpha_\nu| \geqq 1} |\alpha_\nu| \asymp \| P \|. \tag{10}$$

(Ein eventuell leeres Produkt soll wie üblich 1 bedeuten.)

Beweis. Für

$$a_0 \prod_{|\alpha_\nu| \geqq 1} |\alpha_\nu| \ll \| P \|$$

gibt Feldmann [1] einen einfachen Beweis, der auch bei Kasch-Volkmann [2] wiedergegeben ist. Auf eine Wiederholung sei hier verzichtet. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \| P \| &\leqq \sum_0^n |a_\nu| = a_0 \sum_0^n |\sigma_\nu(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \\ &\leqq a_0 \sum_0^n \sigma_\nu(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|) = a_0 \prod (1 + |\alpha_\nu|) \\ &\leqq a_0 \prod_{|\alpha_\nu| < 1} 2 \cdot \prod_{|\alpha_\nu| \geqq 1} 2 |\alpha_\nu| \ll a_0 \prod_{|\alpha_\nu| \geqq 1} |\alpha_\nu|. \end{aligned}$$

Hilfssatz 2. *Es sei ψ eine feste positive Zahl. Dann gilt mit Konstanten in der $\asymp$-Beziehung, die außer von ξ und n auch von ψ abhängen dürfen,*

$$\prod_{|\xi - \alpha_\nu| \geqq \psi} |\xi - \alpha_\nu| \asymp \frac{\| P \|}{a_0}, \tag{11}$$

$$\prod_{|\xi - \alpha_\nu| < \psi} |\xi - \alpha_\nu| \asymp \frac{|P(\xi)|}{\| P \|}. \tag{12}$$

Beweis. Wir betrachten das Polynom $Q(x) = P(x + \xi)$. Aus

$$Q(x) = \sum_0^n \frac{x^\nu}{\nu!} P^{(\nu)}(\xi)$$

folgt sofort $\| Q \| \ll \| P \|$, aus der Entwicklung von $P(x) = Q(x - \xi)$ ebenso $\| P \| \ll \| Q \|$, insgesamt also

$$\| Q \| \asymp \| P \|.$$

$Q(x)$ hat die Nullstellen $\alpha_\nu - \xi$. Wird Hilfssatz 1 auf Q angewandt, so ergibt sich

$$\prod_{|\xi - \alpha_\nu| \geqq 1} |\xi - \alpha_\nu| \asymp \frac{\| Q \|}{a_0} \asymp \frac{\| P \|}{a_0}.$$

Ersetzt man unter dem Produktzeichen die Schranke 1 durch ψ, so treten höchstens n Faktoren hinzu (oder fallen fort) und deren Werte liegen zwischen 1 und ψ. Damit ist (11) gezeigt. (12) folgt unmittelbar, weil ja

$$\prod_{\nu=1}^{n} |\xi - \alpha_\nu| = \frac{|P(\xi)|}{a_0}$$

ist.

Hilfssatz 3. *Für* $P = \prod_{\varrho} P_\varrho$ *gilt*

$$\|P\| \asymp \prod_{\varrho} \|P_\varrho\|.$$

Die Konstanten hängen dabei nur von $n = \operatorname{grad} P$ *ab.*

Das ergibt sich unmittelbar aus Hilfssatz 1, denn die linken Seiten von (10) multiplizieren sich einfach. Die Konstanten hängen zunächst von allen $n_\varrho = \operatorname{grad} P_\varrho$ ab. Da es nur endlich viele Zerlegungen $n = \Sigma n_\varrho$ gibt, können dann neue, von n allein abhängende Konstanten gewählt werden.

Hilfssatz 4. *Zu gegebenem* $\varepsilon > 0$ *gibt es unendlich viele irreduzible Polynome* P *mit ganzrationalen Koeffizienten, für die*

$$0 < |P(\xi)| \ll \|P\|^{-w_n(\xi)+\varepsilon}, \quad \operatorname{grad} P \leqq n \tag{13}$$

gilt.

Beweis. Wäre die Aussage falsch, so gäbe es ein $c > 0$, so daß für irreduzible Polynome P mit $P(\xi) \neq 0$ und $\operatorname{grad} P \leqq n$ stets

$$|P(\xi)| \gg \|P\|^{-w_n+c}$$

wäre. Ist dann Q ein beliebiges Polynom ($Q(\xi) \neq 0$, $\operatorname{grad} Q \leqq n$) und $Q = \prod_{\varrho} Q_\varrho$ seine Zerlegung in irreduzible Faktoren, so folgt mit Hilfssatz 3

$$|Q_\varrho(\xi)| \gg \|Q_\varrho\|^{-w_n+c},$$

$$|Q(\xi)| = \prod_{\varrho} |Q_\varrho(\xi)| \gg \prod_{\varrho} \|Q_\varrho\|^{-w_n+c} \asymp \|Q\|^{-w_n+c},$$

entgegen der Definition von $w_n(\xi)$.

5. *Für das Folgende sei*

$$|\xi - \alpha_\nu| = p_\nu$$

gesetzt und die Numerierung so gewählt, daß

$$p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots$$

ist.

Beweis von (5). Wir betrachten die unendlich vielen Polynome P, die (13) gemäß Hilfssatz 4 erfüllen. Es sei $\operatorname{grad} P = n' \leqq n$. Mit der angenommenen Numerierung ist für $\varkappa < \lambda$

$$|\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda| \leqq |\xi - \alpha_\varkappa| + |\xi - \alpha_\lambda| = p_\varkappa + p_\lambda \leqq 2p_\lambda.$$

Die Diskriminante von P,

$$D = a_0^{2n'-2} \prod_{\varkappa<\lambda} (\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)^2 \qquad (= 1 \text{ für } n' = 1),$$

ist eine ganzrationale von Null verschiedene Zahl. Daher wird

$$1 \leqq |D|^{\frac{1}{2}} = a_0^{n'-1} \prod_{\varkappa<\lambda} |\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda| \leqq a_0^{n'-1} \prod_{\varkappa<\lambda} 2p_\lambda,$$

$$1 \ll a_0^{n'-1} \prod_{1}^{n'} p_\lambda^{\lambda-1}. \tag{14}$$

Multiplizieren wir dies mit p_1, so läßt sich rechterhand der Faktor $|P(\xi)|$ herausheben. Das übrige wird mit Hilfssatz 2 abgeschätzt:

$$p_1 \ll |P(\xi)|\, a_0^{n'-2} \prod_{2}^{n'} p_\lambda^{\lambda-2} \leqq |P(\xi)|\, a_0^{n-2} \prod_{p_\lambda \geqq 1} p_\lambda^{n-2}$$
$$\ll |P(\xi)| \cdot \|P\|^{n-2} \ll \|P\|^{-w_n+\varepsilon+n-2},$$
$$|\xi - \alpha_1| \ll \|\alpha_1\|^{-1-(w_n-n+1-\varepsilon)},$$

d. h.

$$w_n^*(\xi) \geqq w_n(\xi) - n + 1 - \varepsilon$$

mit beliebigem $\varepsilon > 0$, also (5).

Beweis von (8). Angenommen es sei unendlich oft $n' \geqq 2$. Dann multiplizieren wir (14) mit $p_1^2 p_2$ und heben rechts den Faktor $|P(\xi)|^2$ heraus. Das ergibt

$$p_1^3 \leqq p_1^2 p_2 \ll |P(\xi)|^2\, a_0^{n'-3} \prod_{3}^{n'} p_\lambda^{\lambda-3}$$
$$\leqq |P(\xi)|^2\, a_0^{n-3} \prod_{p_\lambda \geqq 1} p_\lambda^{n-3}$$
$$\ll \|P\|^{-2w_n+2\varepsilon+n-3},$$
$$|\xi - \alpha_1| \ll \|\alpha_1\|^{-1-\frac{1}{3}(2w_n-n-2\varepsilon)},$$

also

$$w_n^* \geqq \frac{2}{3} w - \frac{1}{3} n.$$

Ist stets $n' = 1$, so folgt sogar

$$p_1 \asymp \frac{|P(\xi)|}{\|P\|} \ll \|P\|^{-1-w_n+\varepsilon} = \|\alpha_1\|^{-1-w_n+\varepsilon},$$
$$w_n^* \geqq w_n.$$

Beweis von (5′). Es sei $\xi = \eta + i\vartheta$, $\vartheta \neq 0$. Da mit α stets auch $\bar{\alpha}$ Nullstelle von P ist, tritt jeder Faktor $|\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda|$, für den $p_\varkappa < |\vartheta|$ und $p_\lambda < |\vartheta|$ ist, in $\prod_{\varkappa<\lambda} |\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda|$ zweimal auf. Indem wir alle übrigen Faktoren als Π^* zusammenfassen, erhalten wir

$$a_0^{n'-1}\, \Pi^* \leqq a_0^{n-1} \prod_{p_\lambda \geqq 1} p_\lambda^{n-1} \ll \|P\|^{n-1}$$

und weiter

$$1 \ll \prod_{\substack{\varkappa<\lambda \\ p_\lambda<|\vartheta|}} |\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda|^2 \cdot a_0^{n'-1}\, \Pi^* \ll \prod_{p_\lambda<|\vartheta|} p_\lambda^{2(\lambda-1)} \cdot \|P\|^{n-1}$$
$$\ll \prod_{\substack{p_\lambda<|\vartheta| \\ \lambda \geqq 2}} p_\lambda^2 \cdot \|P\|^{n-1}.$$

Daraus wird, wieder mit Hilfssatz 2,

$$p_1^2 \ll \|P\|^{n-1} \prod_{p_\lambda<|\vartheta|} p_\lambda^2 \ll \|P\|^{n-3}\, |P(\xi)|^2 \ll \|P\|^{-3-2w_n+n+2\varepsilon},$$
$$|\xi - \alpha_1| \ll \|\alpha_1\|^{-1-w_n+\frac{n-1}{2}+\varepsilon},$$

also

$$w_n^* \geqq w_n - \frac{n-1}{2}.$$

6. *Beweis von* (6) *und* (6'). Wegen $w_1^* = w_1$ brauchen wir nur $n \geqq 2$ zu betrachten. Es bezeichne P weiterhin die in Hilfssatz 4 genannten irreduziblen Polynome vom Grade $n' \leqq n$. Ist Q ein anderes Polynom mit ganzrationalen Koeffizienten, grad $Q \leqq n$ und Q durch P teilbar, also $Q = PQ_1$, so ist nach Hilfssatz 3

$$\|Q\| \gg \|P\| \cdot \|Q_1\| \geqq \|P\|, \quad \|Q\| \geqq c_1 \|P\| \qquad (c_1 > 0).$$

Ist dagegen

$$\|Q\| \leqq \frac{c_1}{2} \|P\|,$$

so ist Q durch P nicht teilbar, also zu P sogar teilerfremd. Bekanntlich (s. z. B. Schneider [5], S. 69) läßt sich Q so wählen, daß

$$\|Q\| \leqq \frac{c_1}{2} \|P\| \quad \textit{und} \quad |Q(\xi)| \ll \|P\|^{-n} \qquad (\textit{für reelles } \xi)$$

bzw.

$$\|Q\| \leqq \frac{c_1}{2} \|P\| \quad \textit{und} \quad |Q(\xi)| \ll \|P\|^{-\frac{n-1}{2}} \qquad (\textit{für komplexes } \xi)$$

ist. Da $n < s$ ist, verschwindet $Q(\xi)$ nicht. *Wir setzen* grad $Q = m$ (mit $m \leqq n$),

$$Q(x) = \sum_0^m b_\mu x^{m-\mu} = b_0 \prod_1^m (x - \beta_\mu), \quad b_0 > 0, \quad |\xi - \beta_\mu| = q_\mu$$

und

$$q_1 \leqq q_2 \leqq \cdots \leqq q_m.$$

Die Resultante von P und Q

$$R = a_0^m b_0^{n'} \prod_{\nu,\mu} (\alpha_\nu - \beta_\mu)$$

ist ganzrational und, da P und Q keine gemeinsamen Nullstellen haben, von Null verschieden.

Es sei zunächst ξ reell, $n' \geqq 2$, $m \geqq 2$. Dann wird folgendermaßen abgeschätzt:

$$1 \leqq a_0^m b_0^{n'} \prod_{\nu,\mu} |\alpha_\nu - \beta_\mu| \leqq a_0^n b_0^n \prod_{\nu,\mu} (p_\nu + q_\mu)$$

$$\ll a_0^n b_0^n \prod_{\nu,\mu} \operatorname{Max}(p_\nu, q_\mu) = a_0^n b_0^n \prod_{\nu=1}^{n'} p_\nu^{e_\nu} \prod_{\mu=1}^{m} q_\mu^{f_\mu},$$

wobei

$$e_\nu = \sum_{\substack{\mu \\ q_\mu < p_\nu}} 1, \quad f_\mu = \sum_{\substack{\nu \\ p_\nu \leqq q_\mu}} 1$$

gesetzt ist. Mit Hilfssatz 2 erhalten wir daraus weiter

$$(15) \qquad 1 \ll \prod_{p_\nu < 1} p_\nu^{e_\nu} \prod_{q_\mu < 1} q_\mu^{f_\mu} a_0^n b_0^n \prod_{p_\nu \geqq 1} p_\nu^n \prod_{q_\mu \geqq 1} q_\mu^n$$

$$\ll \prod_{p_\nu < 1} p_\nu^{e_\nu} \prod_{q_\mu < 1} q_\mu^{f_\mu} \|P\|^n \|Q\|^n.$$

Offenbar ist $e_1 \leqq e_2 \leqq \cdots$ und $f_1 \leqq f_2 \leqq \cdots$.

Wir nehmen vorläufig $p_2 < 1$, $q_2 < 1$ an und überzeugen uns nun, daß abgesehen von endlich vielen der betrachteten Polynompaare P, Q

$$e_1 \leqq 1 \quad \textit{und} \quad f_1 \leqq 1$$

gilt. Wäre z. B. $f_1 \geqq 2$, so folgte aus (15) mit Hilfssatz 2

$$\begin{aligned} 1 &\ll \| P \|^n \| Q \|^n \prod_{q_\mu < 1} q_\mu^2 \ll \| P \|^n \| Q \|^{n-2} | Q(\xi) |^2 \\ &\ll \| P \|^{n+n-2-2n} = \| P \|^{-2}, \\ \| P \| &\ll 1. \end{aligned}$$

Das gleiche erhält man aus $e_1 \geqq 2$. Im folgenden sei also $e_1 \leqq 1$, d. h. $p_1 \leqq q_2$ und $f_1 \leqq 1$, d. h. $q_1 < p_2$. Dann sind folgende Anordnungen möglich:

		e_1	f_1	e_2	f_2
a) $p_1 \leqq q_1 < p_2 \leqq q_2$		0	1	1	$\geqq 2$
b) $p_1 \leqq q_1 \leqq q_2 < p_2$	mit	0	1	$\geqq 2$	1
c) $q_1 < p_1 \leqq p_2 \leqq q_2$		1	0	1	$\geqq 2$
d) $q_1 < p_1 \leqq q_2 < p_2$		1	0	$\geqq 2$	1

Im Fall a) multiplizieren wir (15) mit $p_1 q_1$ und finden nach Konstruktion der P, Q

$$\begin{aligned} p_1^2 \leqq p_1 q_1 &\ll \| P \|^n \| Q \|^n \prod_{p_\nu < 1} p_\nu \prod_{q_\mu < 1} q_\mu^2 \\ &\ll \| P \|^{n-1} \| Q \|^{n-2} \, | P(\xi) Q^2(\xi) | \\ &\ll \| P \|^{2n-3} \| P \|^{-w_n + \varepsilon - 2n} = \| P \|^{-3-w_n+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Im Fall b) entsprechend:

$$\begin{aligned} p_1^2 &\ll \| P \|^n \| Q \|^n \prod_{p_\nu < 1} p_\nu^2 \prod_{q_\mu < 1} q_\mu^2 \\ &\ll \| P \|^{n-2} \| Q \|^{n-1} \, | P^2(\xi) Q(\xi) | \\ &\ll \| P \|^{2n-3-2w_n+2\varepsilon-n} \leqq \| P \|^{-3-w_n+2\varepsilon} \end{aligned}$$

(da $w_n(\xi) \geqq n$ ist). Aus c) und d) erhält man ebenso

$$q_1^2 \ll \| P \|^{-3-w_n+2\varepsilon},$$

indem man (15) mit q_1^2 bzw. $p_1 q_1$ multipliziert.

Da α_1 Nullstelle des irreduziblen Polynoms P ist, ist $\| \alpha_1 \| = \| P \|$. Das zu β_1 gehörige irreduzible Polynom teilt Q; daher ist $\| \beta_1 \| \ll \| Q \| \ll \| P \|$. Zu jedem der unendlich vielen Ausgangspolynome P haben wir also mit α_1 oder β_1 die Approximation

$$| \xi - \alpha_1 | \ll \| P \|^{-\frac{3+w_n}{2}+\varepsilon} = \| \alpha_1 \|^{-1-\frac{w_n+1}{2}+\varepsilon}$$

bzw.

$$| \xi - \beta_1 | \ll \| P \|^{-1-\frac{w_n+1}{2}+\varepsilon} \ll \| \beta_1 \|^{-1-\frac{w_n+1}{2}+\varepsilon}$$

also ist wie behauptet

$$w_n^*(\xi) \geqq \frac{1}{2} (w_n(\xi) + 1) \qquad (\xi \textit{ reell}, \; n < s).$$

Sollten die Annahmen $n' \geqq 2$, $m \geqq 2$, $p_2 < 1$, $q_2 < 1$ nicht für unendlich viele der Polynompaare P, Q zutreffen, so hat man wegen (12) nnendlich oft

$$p_1 \ll \frac{| P(\xi) |}{\| P \|} \text{ oder } q_1 \ll \frac{| Q(\xi) |}{\| Q \|},$$

also

$$| \xi - \alpha_1 | = p_1 \ll \| P \|^{-w_n+\varepsilon-1} \leqq \| P \|^{-n-1+\varepsilon} = \| \alpha_1 \|^{-n-1+\varepsilon}$$

oder

$$|\xi - \beta_1| = q_1 \ll \|P\|^{-n} \|Q\|^{-1} \ll \|Q\|^{-n-1} \ll \|\beta_1\|^{-n-1}$$

und damit $w_n^* \geqq n$. Dies ist für $w_n < 2n - 1$ schärfer als (6); für $w_n \geqq 2n - 1$ folgt (6) schon aus (5).

Nun sei ξ nicht reell, $\xi = \eta + i\vartheta$, $\vartheta \neq 0$ und $n \geqq 4$. Offenbar ist $n' \geqq 2$ und $m \geqq 2$, da sonst $|P(\xi)| \gg 1$ bzw. $|Q(\xi)| \gg 1$ wäre. Wir gehen davon aus, daß jeder Faktor $|\alpha_\nu - \beta_\mu|$, für den $|\xi - \alpha_\nu| < |\vartheta|$ und $|\xi - \beta_\mu| < |\vartheta|$ sind, in

$$1 \ll a_0^m b_0^{n'} \prod_{\nu,\mu} |\alpha_\nu - \beta_\mu|$$

zweimal auftritt, so daß wir daraus den Faktor

$$\prod_{\substack{p_\nu < |\vartheta| \\ q_\mu < |\vartheta|}} |\alpha_\nu - \beta_\mu|^2 \leqq \prod_{\substack{p_\nu < |\vartheta| \\ q_\mu < |\vartheta|}} (p_\nu + q_\mu)^2 \ll \prod_{\substack{p_\nu < |\vartheta| \\ q_\mu < |\vartheta|}} \operatorname{Max}(p_\nu, q_\mu)^2$$
$$= \prod_{p_\nu < |\vartheta|} p_\nu^{2e_\nu} \prod_{q_\mu < |\vartheta|} q_\mu^{2f_\mu}$$

isolieren können. Den komplementären Faktor Π^* schätzen wir ab:

$$a_0^m b_0^{n'} \Pi^* |\alpha_\nu - \beta_\mu| \ll a_0^n b_0^n \prod_{\nu,\mu} \operatorname{Max}(p_\nu, q_\mu)$$
$$\leqq a_0^n b_0^n \prod_{p_\nu \geqq 1} p_\nu^n \prod_{q_\mu \geqq 1} q_\mu^n$$
$$\ll \|P\|^n \|Q\|^n.$$

Zusammengenommen haben wir

$$1 \ll \|P\|^n \|Q\|^n \prod_{p_\nu < |\vartheta|} p_\nu^{2e_\nu} \prod_{q_\mu < |\vartheta|} q_\mu^{2f_\mu}.$$

Ist $f_1 \geqq 2$, so folgt

$$1 \ll \|P\|^n \|Q\|^n \prod_{q_\mu < |\vartheta|} q_\mu^4 \ll \|P\|^n \|Q\|^{n-4} |Q(\xi)|^4$$
$$\ll \|P\|^n \|Q\|^{n-4} \|P\|^{-2(n-1)} \leqq \|P\|^{-2},$$

was nur für endlich viele Ausnahmen zutreffen kann. Wir dürfen also wieder $f_1 \leqq 1$ und analog $e_1 \leqq 1$ annehmen. Ferner sei jetzt $p_2 < |\vartheta|$ und $q_2 < |\vartheta|$. Die Diskussion der Fälle a) bis d) führt hier bei ganz entsprechender Rechnung auf

a)
$$p_1^4 \leqq p_1^2 q_1^2 \ll \|P\|^{n-2} \|Q\|^{n-4} |P(\xi)|^2 |Q(\xi)|^4$$
$$\ll \|P\|^{2n-6} \|P\|^{-2w_n+2\varepsilon} \|P\|^{-4\frac{n-1}{2}} \qquad (n \geqq 4)$$
$$= \|P\|^{-4-2w_n+2\varepsilon},$$

bzw. b)

$$p_1^4 \ll \|P\|^{n-4} \|Q\|^{n-2} |P(\xi)|^4 |Q(\xi)|^2$$
$$\ll \|P\|^{-4-2w_n-(2w_n-n+1)+4\varepsilon} \leqq \|P\|^{-4-2w_n+4\varepsilon},$$

bzw. c), d)

$$q_1^4 \ll \|P\|^{-4-2w_n+4\varepsilon},$$

also

$$|\xi - \alpha_1| \ll \|\alpha_1\|^{-1-\frac{w_n}{2}+\varepsilon}$$

oder

$$|\xi - \beta_1| \ll \|\beta_1\|^{-1-\frac{w_n}{2}+\varepsilon};$$

mithin

$$w_n^*(\xi) \geqq \frac{1}{2} w_n(\xi).$$

Ist jedoch unendlich oft $p_2 \geqq |\vartheta|$ oder $q_2 \geqq |\vartheta|$, so folgt aus (12)

$$|\xi - \alpha_1| \ll \frac{|P(\xi)|}{\|P\|} \ll \|P\|^{-1-w_n+\varepsilon} \leqq \|P\|^{-1-\frac{n-1}{2}+\varepsilon} = \|\alpha_1\|^{-1-\frac{n-1}{2}+\varepsilon}$$

bzw.

$$|\xi - \beta_1| \ll \frac{|Q(\xi)|}{\|Q\|} \ll \|Q\|^{-1}\|P\|^{-\frac{n-1}{2}} \ll \|Q\|^{-1-\frac{n-1}{2}} \ll \|\beta_1\|^{-1-\frac{n-1}{2}},$$

also $w_n^* \geqq \frac{n-1}{2}$. Für $w_n < n-1$ ist das besser als (6′); für $w_n \geqq n-1$ folgt (6′) schon aus (5′).

Ist ξ nicht reell und $n \leqq 3$, so erhält man sogar

$$w_n^*(\xi) = w_n(\xi). \tag{16}$$

Ein Polynom von höchstens drittem Grad kann nämlich in $|\xi - \alpha| < |\vartheta|$ höchstens eine Nullstelle haben. Aus

$$\prod_{p_\nu < |\vartheta|} p_\nu \asymp \frac{|P(\xi_\nu)|}{\|P\|} \ll \|P\|^{-1-w_n+\varepsilon}$$

folgt daher

$$|\xi - \alpha_1| \ll \|P\|^{-1-w_n+\varepsilon} \ll \|\alpha_1\|^{-1-w_n+\varepsilon},$$

also (16).

7. *Beweis von* (7) *und* (7′). Es sei $n < s$ und ξ zunächst reell. Zu $\xi_0 = \xi$ werden weitere reelle Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ gewählt, so daß alle ξ_ν voneinander verschieden sind. $\varepsilon > 0$ sei beliebig und

$$\gamma = w_n(\xi)(1+\varepsilon)^2 \qquad (> n).$$

Minkowskis Linearformensatz garantiert für jedes H die Existenz eines ganzzahligen Polynoms $P(x) = \sum_\nu a_\nu x^{n-\nu}$, so daß

$$\begin{cases} |P(\xi)| \ll H^{-\gamma} \\ |P(\xi_\nu)| \ll H \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1) \\ |P(\xi_n)| \ll H^{\gamma-n+1} \end{cases} \tag{17}$$

ist. Wegen $n < s$ ist $P(\xi) \neq 0$. Aus den Werten $P(\xi_\nu)$ erhält man die Koeffizienten a_ν durch Auflösen eines linearen Gleichungssystems, dessen Determinante die Vandermondesche Determinante von $\xi_0, \ldots, \xi_n$, also eine Konstante $\Delta \neq 0$ ist. Für die Höhe ergibt sich daraus

$$\|P\| \ll \max_{\nu=0}^{n} |P(\xi_\nu)| \ll H^{\gamma-n+1}. \tag{18}$$

Andererseits ist nach (17) und nach Definition von $w_n(\xi)$

$$H^{-w_n(1+\varepsilon)^2} \gg |P(\xi)| \gg \|P\|^{-w_n(1+\varepsilon)},$$

also

$$\|P\| \gg H^{1+\varepsilon}.$$

Legt man um die $\xi_\nu (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ kleine zueinander fremde Kreise, sagen wir vom Radius ϱ, und wendet an diesen Stellen Hilfssatz 2 an,

$$\prod_{\substack{\mu \\ |\xi_\nu - \alpha_\mu| < \varrho}} |\xi_\nu - \alpha_\mu| \asymp \frac{|P_\nu(\xi)|}{\|P\|} \ll \frac{H}{H^{1+\varepsilon}} = H^{-\varepsilon},$$

so sieht man, daß für genügend großes H jeder dieser n Kreise eine, folglich auch nur eine, Nullstelle von P enthält. Für die bei ξ gelegene Nullstelle α_0 findet man dann

$$|\xi - \alpha_0| \asymp \frac{|P(\xi)|}{\|P\|} \ll \|P\|^{-1} H^{-\gamma}$$

und wegen (18)

$$|\xi - \alpha_0| \ll \|P\|^{-1-\frac{\gamma}{\gamma-n+1}} \ll \|\alpha_0\|^{-1-\frac{\gamma}{\gamma-n+1}}.$$

Damit ist (7) bewiesen.

Ist ξ nicht reell, so sei $\xi_0 = \xi$, $\xi_1 = \bar{\xi}$ und es seien $\xi_2, \ldots, \xi_n$ voneinander verschiedene reelle Zahlen. Minkowskis Satz liefert solche Polynome P, daß

$$\begin{aligned} &|P(\xi_\nu)| \ll H^{-\gamma} && (\nu = 0, 1), \\ &|P(\xi_\nu)| \ll H && (\nu = 2, \ldots, n-1), \\ &|P(\xi_n)| \ll H^{2\gamma-n+2} \end{aligned}$$

gilt. Mit der gleichen Schlußweise wie im reellen Fall liefert die Rechnung jetzt

$$H^{1+\varepsilon} \ll \|P\| \ll H^{2\gamma-n+2},$$

$$|\xi - \alpha_0| \asymp \frac{|P(\xi)|}{\|P\|} \ll \|P\|^{-1} H^{-\gamma} \ll \|P\|^{-1-\frac{\gamma}{2\gamma-n+2}}$$

$$\ll \|\alpha_0\|^{-1-\frac{\gamma}{2\gamma-n+2}},$$

also

$$w_n^*(\xi) \leqq \frac{w_n(\xi)}{2w_n(\xi) - n + 2}.$$

Literatur

[1] *N. I. Feldmann*, Approximation einiger transzendenter Zahlen. I. Izvestija Akad. Nauk. SSSR, Ser. mat. **15** (1951), 53—74 (russ.).

[2] *F. Kasch - B. Volkmann*, Zur Mahlerschen Vermutung über S-Zahlen. Math. Ann. **136** (1958), 442—453.

[3] *J. F. Koksma*, Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen. Mh. Math. Physik **48** (1939), 176—189.

[4] *K. Mahler*, Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. I. J. reine angew. Math. **166** (1932), 118—150.

[5] *Th. Schneider*, Einführung in die transzendenten Zahlen. Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957.

Eingegangen 10. November 1960.

Zur Darstellung von Zahlen durch Summen von Primzahlpotenzen.

II. Darstellungen für „fast alle" Zahlen.

Von *Wolfgang Schwarz* in Erlangen.

Im I. Teil dieser Arbeit (Zur Darstellung von Zahlen durch Summen von Primzahlpotenzen, I. Darstellung hinreichend großer Zahlen, dieses Journal, Bd. 205 [1])) haben wir untersucht, unter welchen Bedingungen sich alle hinreichend großen N in der Form

$$N = b_1 p_1 + \cdots + b_s p_s + f_1(p_1') + \cdots + f_r(p_r')$$

darstellen lassen, wobei $b_1, \ldots, b_s$ sowie die Koeffizienten der Polynome $f_j(x)$ $(j = 1, \ldots, r)$ ganze Zahlen sind, die b_σ sowie die höchsten Koeffizienten der $f_j(x)$ als positiv vorausgesetzt, und wobei $p_1, \ldots, p_r'$ Primzahlen bedeuten. Die Untersuchung erfolgt nach der Methode von Hardy-Littlewood-Vinogradov.

Weiterreichend ist folgende Abwandlung der Methode: Man fragt nicht, wie muß eine unendliche Teilmenge $\mathfrak{N}$ der natürlichen Zahlen beschaffen sein, so daß sich alle hinreichend großen Zahlen N aus $\mathfrak{N}$ in einer bestimmten Gestalt darstellen lassen, sondern man fragt: Wie muß diese Menge $\mathfrak{N}$ beschaffen sein, daß sich „fast alle" Zahlen aus $\mathfrak{N}$ in einer bestimmten Gestalt darstellen lassen, d. h. daß sich alle Zahlen $n \in \mathfrak{N}$ mit $n \leqq N$ mit höchstens $o(N)$ Ausnahmen (für $N \to \infty$) in der vorgegebenen Gestalt darstellen lassen. In der mathematischen Literatur sind „Fast-alle"-Darstellungen bestätigt für [2])

$p_1 + p_2$ (v. d. Corput, Cudakov und Estermann),

$p + x^k$, $k > 0$, ganz; (Davenport-Heilbronn (6)),

$p + p'^k$; $p_1^2 + p_2^2 + p_3^k$ (Hua (12)),

$p + f(p')$, wobei $f(x)$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten bezeichnet; (v. d. Corput (2), mit einer gegen Davenport-Heilbronn (6) und Hua (12) wesentlich verbesserten Abschätzung der Anzahl der nichtdarstellbaren Zahlen),

$p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 + x^3$ (Roth (22)),

$p^2 + p'^3 + x^3$ (Halberstam (10)),

$x^2 + y_1^3 + y_2^3$ (Davenport (5)),

$x_1^2 + x_2^3 + x_3^4$ (Roth (20)).

---

[1]) Diese Arbeit werden wir fortan mit Teil I zitieren; das Literaturverzeichnis für Teil II befindet sich mit in Teil I. Literaturhinweise wie etwa Hua (12) bedeuten also die Arbeit (12) von Hua, die in Teil I Seite 47 aufgeführt ist. Weiter beachte man noch die in Teil I eingeführten Bezeichnungen und Vereinbarungen, besonders: N, P sind hinreichend große ganze Zahlen, kleine lateinische Buchstaben außer c, e, z ganze Zahlen, und p stets Primzahlen.

[2]) Diese Aufstellung ist nicht vollständig.

Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen sich „fast alle" Zahlen n in einer der Gestalten

$$n = p_1 + p_2^k \ (k > 0 \text{ ganz}),$$
$$n = p^2 + p'^2 + p''^k,$$
$$n = p_1^2 + p_2^4 + p_3^4 + p_4^k$$
$$n = p_1^2 + p_2^3 + p_3^6 + p_4^k,$$
$$n = p_1^3 + \cdots + p_4^3 + p_5^k$$

darstellen lassen.

Als Folgerung ergibt sich unter anderem, daß sich *jede* hinreichend große Zahl N, die gewisse Kongruenzbedingungen erfüllt, als Summe von 4 Quadraten und einer k-ten Potenz von Primzahlen bzw. als Summe von 8 Kuben und einer k-ten Potenz von Primzahlen darstellen läßt. Hierin ist das bekannte Ergebnis (Hua (14)) enthalten, daß jede hinreichend große ungerade Zahl eine Summe von 9 Kuben von Primzahlen ist.

Weitere, mit den Methoden dieser Arbeit lösbare Probleme sind additive Zerfällungen für fast alle n von der Gestalt

$$n = p_1^2 + p_2^4 + p_3^8 + p_4^8 + p_5^k \ (k > 0, \text{ ganz})$$

oder

$$n = p_1^2 + p_2^4 + p_3^8 + p_4^{16} + p_5^{16} + p_6^k.$$

Die genaue Formulierung der Ergebnisse verschieben wir auf das Ende der Arbeit. Zunächst wollen wir die nötigen Hilfssätze beweisen.

1. Arithmetische Sätze.

Der im I. Teil angegebene Satz I, 8 von Hua ermöglicht es uns, für die Lösungsanzahl von gewissen diophantischen Gleichungen recht scharfe Abschätzungen zu gewinnen.

Lemma 1. 1: *Sei*

$$(1,1)\quad \begin{cases} f(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k, & k \geqq 2, \quad (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) = 1 \\ g(x) = b_0 x^{k'} + b_1 x^{k'-1} + \cdots + b_{k'}, & k' \geqq 2, \quad (b_0, b_1, \ldots, b_{k'-1}) = 1. \end{cases}$$

Die Koeffizienten $a_\varkappa$, $b_{\varkappa'}$ seien ganz, es sei $a_0 > 0$, $b_0 > 0$.

(1, 2) *P sei eine hinreichend große ganze Zahl. L bezeichne die Lösungsanzahl der diophantischen Gleichung*

$$(1,3)\qquad f(x_1) + g(y_1) = f(x_2) + g(y_2)$$

unter den Nebenbedingungen

$$(1,4)\qquad \begin{aligned} 1 \leqq x_1, x_2 \leqq \mathsf{A} \cdot P^\xi, \ \mathsf{A} > 0, \ \xi > 0 \\ 1 \leqq y_1, y_2 \leqq \mathsf{B} \cdot P^\eta, \ \mathsf{B} > 0, \ \eta > 0. \end{aligned}$$

Sei o. B. d. A. $\eta \leqq \xi$.

Dann ist:

$$(1,5)\qquad L \leqq c_{17}(k, k', g, \mathsf{B}) \cdot P^{2\eta} \cdot (\log P)^{c_5(k,k')} + \mathsf{A} \cdot \mathsf{B} \cdot k \cdot k' \cdot P^{\xi+\eta}$$

mit Konstanten $c_5 > 0$, $c_{17} > 0$, die nicht von P abhängen.

Beweis: Wir folgen im Beweisgang — bis auf die Verschärfung durch den Satz von Hua — einer Arbeit von Landau [3]).

Wir schreiben (1, 3) in der Form: $f(x_1) - f(x_2) = g(y_2) - g(y_1)$. Sei

$$(1,6)\qquad g(y_2) - g(y_1) = 0.$$

[3]) *F. Landau*, Über die neue Winogradoffsche Behandlung des Waringschen Problems, Math. Z. **31** (1930), 326.

Die Anzahl der Wertepaare (y_1, y_2) mit (1, 6) ist $\leqq k' \cdot \mathsf{B} \cdot P^{\eta}$, die Lösungsanzahl von (1, 3) unter der Nebenbedingung (1, 6) wird also

$$\leqq k \cdot k' \cdot \mathsf{A} \cdot \mathsf{B} \cdot P^{\eta+\xi}.$$

Ist nun $f(x_1) - f(x_2) = m \neq 0$, so ist $x_1 \neq x_2$ und nach Taylor:

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) \cdot \left\{ f'(x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!} \cdot (x_1 - x_2) + \cdots \right\},$$

also geht $h = x_1 - x_2$ in $m = f(x_1) - f(x_2)$ auf. Wenn $T(|m|)$ die Anzahl der positiven Teiler von $|m|$ bezeichnet, so gibt es für h höchstens $2\,T(|m|)$ Möglichkeiten. Bei festem h ist $f(x_1) - f(x_2)$ ein Polynom in x_2 vom genauen Grade $(k-1) \geqq 1$; zu jedem h und m gibt es also höchstens $(k-1)$ Werte x_2. Somit gibt es zu jedem m höchstens $2 \cdot (k-1) \cdot T(|m|)$ Wertepaare (x_1, x_2). Die Lösungsanzahl von (1, 3) unter der Nebenbedingung $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$ wird somit, wenn wir mit $F(y_1, y_2)$ das Polynom $F(y_1, y_2) = g(y_2) - g(y_1)$ bezeichnen:

$$\leqq \sum_{\substack{1 \leqq y_1, y_2 \leqq \mathsf{B} \cdot P^{\eta} \\ F(y_1, y_2) \neq 0}} 2(k-1) \cdot T(|F(y_1, y_2)|) \leqq c_{17}(k, k', g, \mathsf{B}) \cdot P^{2\eta} \cdot (\log P)^{c_8(k,k')}$$

nach Satz I, 8 aus Teil I. Dieser ist anwendbar, denn wegen (1, 1) hat $F(y_1, y_2)$ teilerfremde Koeffizienten.

Korollar: *Für $\xi = \eta$ ist $L = O\left(P^{\xi+\eta} \cdot (\log P)^{c_8(k,k')}\right)$.*

Lemma 1. 2: *Die Zahlen a_ν, b_ν, d_ν seien ganz, sei $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ und $d_0 > 0$. Wir setzen:*

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

$$(1, 7) \quad g(x) = b_0 x^{k_g} + b_1 x^{k_g - 1} + \cdots + b_{k_g}, \ (b_0, \ldots, b_{k_g - 1}) = 1, \ k_g \geqq 2$$

$$h(x) = d_0 x^{k_h} + d_1 x^{k_h - 1} + \cdots + d_{k_h}, \ (d_0, \ldots, d_{k_h - 1}) = 1, \ k_h \geqq 2.$$

Es sei

$$(1, 8) \quad 1 \leqq x_1, x_2 \leqq P^{\xi}, \ 1 \leqq y_1, y_2 \leqq P^{\eta}, \ 1 \leqq z_1, z_2 \leqq P^{\zeta}, \ \xi, \eta, \zeta > 0.$$

Dann gilt für die Lösungsanzahl L der diophantischen Gleichung

$$(1, 9) \qquad f(x_1) + g(y_1) + h(z_1) = f(x_2) + g(y_2) + h(z_2):$$

$$(1, 10) \qquad L \ll P^{\max\left\{\xi+\eta+\zeta;\, 2\eta+2\zeta;\, 2\eta+2\cdot\frac{k_g}{k_h}\cdot\eta\right\}} \cdot (\log P)^{c_{10}}.$$

Beweis: Wir bezeichnen mit $L(E_1, E_2, \ldots)$ die Lösungsanzahl von (1, 9) unter den Nebenbedingungen $E_1, E_2, \ldots$. Wir schreiben (1, 9) in der Form

$$f(x_1) - f(x_2) = g(y_2) + h(z_2) - g(y_1) - h(z_1).$$

a) Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so haben wir für (x_1, x_2) höchstens $O(P^{\xi})$ Werte, und für

$$g(y_2) + h(z_2) = g(y_1) + h(z_1)$$

ist die Lösungsanzahl nach Lemma 1. 1 bekannt. Also ist:

$$L(f(x_1) = f(x_2)) \ll P^{\xi+\eta+\zeta} \cdot (\log P)^{c_9}.$$

b) Ist $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$, also $x_1 - x_2 \neq 0$, so ist auch

$$R = g(y_2) + h(z_2) - g(y_1) - h(y_1) \neq 0.$$

Nun ist

$$f(x_1) - f(x_2) = -\{a_0(x_2 + x_1) + a_1\} \cdot (x_2 - x_1),$$

also ist: $(x_2 - x_1) \mid R$ und $\{a_0(x_2 + x_1) + a_1\} = -\dfrac{R}{x_2 - x_1}$. Bei festem R hat also $h = x_2 - x_1$ höchstens $2 \cdot T(|R|)$ Möglichkeiten, und zu jedem h gibt es höchstens ein Wertepaar (x_1, x_2). Somit ist die Lösungsanzahl von (1, 9) unter der Nebenbedingung $R \neq 0$:

$$L(R \neq 0) \ll \sum_{\substack{y_1, y_2\ z_1, z_2 \\ R \neq 0}} \sum T(|R|).$$

Bei festem y_1, y_2 ist R ein Polynom in z_1, z_2 mit ganzen teilerfremden Koeffizienten vom Grade k_h. Es ist:

$$\max_{1 \leq z_1, z_2 \leq P^\zeta} (|R|) \ll P^{k_g \cdot \eta} + P^{k_h \cdot \zeta} \ll P^{\max\{k_g \eta, k_h \zeta\}};$$

$$\max\left(P^{2\zeta}, (\max_{z_1, z_2} |R|)^{\frac{2}{k_h}}\right) \ll P^{\max\left(2\zeta, \frac{2k_g}{k_h} \cdot \eta\right)}.$$

Nach dem Satz I, 8 aus Teil I von Hua ist daher unabhängig von y_1, y_2:

$$\Big|\sum_{\substack{1 \leq z_1, z_2 \leq P^\zeta \\ R \neq 0}} T(|R|)\Big| \leqq c'(k_h) \cdot P^{\max\left(2\zeta, \frac{2k_g}{k_h} \cdot \eta\right)} \cdot (\log P)^{c_4(k_g, k_h)}.$$

Für die Lösungsanzahl von (1, 9) erhalten wir hieraus:

$$L \ll L\big(f(x_1) = f(x_2)\big) + P^{2\eta + \max\left(2\zeta, \frac{2k_g}{k_h} \cdot \eta\right)} \cdot (\log P)^{c_5}.$$

Korollar: *Mit passenden Konstanten c'_{19} und $c''_{19} > 0$ gilt für die Lösungsanzahlen der diophantischen Gleichungen*

(1, 11) $$x_1^2 + y_1^4 + z_1^4 = x_2^2 + y_2^4 + z_2^4$$

bzw.

(1, 12) $$x_1^2 + y_1^3 + z_1^6 = x_2^2 + y_2^3 + z_2^6$$

unter den Nebenbedingungen

(1, 11*) $$1 \leqq x_1, x_2 \leqq P^2,\ 1 \leqq y_1, y_2, z_1, z_2 \leqq P$$

bzw.

(1, 12*) $$1 \leqq x_1, x_2 \leqq P^3,\ 1 \leqq y_1, y_2 \leqq P^2,\ 1 \leqq z_1, z_2 \leqq P:$$

(1, 11**) $$L_{(1,11)} \ll P^4 \cdot (\log P)^{c'_{19}}$$

bzw.

(1, 12**) $$L_{(1,12)} \ll P^6 \cdot (\log P)^{c''_{19}}.$$

Lemma 1. 3: *Die Lösungsanzahl L der diophantischen Gleichung*

$$x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 + v_1^3 = x_2^3 + y_2^3 + z_2^3 + v_2^3$$

unter den Nebenbedingungen

$$P^{\frac{1}{3}} \leqq x_1, x_2, y_1, y_2 \leqq 2 \cdot P^{\frac{1}{3}};\ P^{\frac{4}{15}} \leqq z_1, z_2, v_1, v_2 \leqq 2 \cdot P^{\frac{4}{15}}$$

ist

$$L \ll P^{\frac{7}{5}}.$$

Beweis: Nach Roth (22), Lemma 6, S. 272 ist mit

$$f_1(\alpha) = \sum_{P^{\frac{1}{3}} \leq x \leq 2P^{\frac{1}{3}}} e(\alpha x^3);\quad f_2(\alpha) = \sum_{P^{\frac{4}{15}} \leq x \leq 2P^{\frac{4}{15}}} e(\alpha x^3)$$

$$J = \int_0^1 |f_1^2(\alpha) \cdot f_2^2(\alpha)|^2 d\alpha = O\left(P^{\frac{7}{5}}\right).$$

Beachtet man, daß

$$\int_0^1 e(\alpha u)\, d\alpha = \begin{cases} 1 \text{ für } u = 0, \\ 0 \text{ für } u \neq 0,\ u \text{ ganz}, \end{cases}$$

gilt, so erhält man für das Integral J:

$$J = \int_0^1 \sum_{x_1, y_1, z_1, v_1} \sum_{x_2, y_2, z_2, v_2} e(\alpha \cdot \{x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 + v_1^3 - x_2^3 - y_2^3 - z_2^3 - v_2^3\})\, d\alpha = L.$$

2. Hilfssätze über das „Singuläre Produkt".

Wir benützen folgende Bezeichnungen:

(2, 1) $$S_{a,q,k} = \sum_{1 \leq x \leq q} e\left(\frac{a}{q} \cdot x^k\right).$$

(2, 2) $$W_{a,q,k} = \sum_{\substack{1 \leq x \leq q \\ (x,q)=1}} e\left(\frac{a}{q} \cdot x^k\right).$$

(2, 3) $$A(n, q) = (\varphi(q))^{-r} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} \prod_{j=1}^{r} W_{a,q,k_j} \cdot e\left(-\frac{a}{q} \cdot n\right), \qquad (r \geqq 1).$$

(2, 4) $$\mathfrak{S}(n, Q) = \prod_{2 \leq p \leq Q} \left\{1 + \sum_{d=1}^{\infty} A(n, p^d)\right\}. \qquad \text{(Singuläres Produkt).}$$

$k_j > 0$ sind ganze Zahlen ($j = 1, \ldots, r$); die ganze Zahl Q wird später noch genauer festgelegt. Zunächst nehmen wir an, daß Q hinreichend groß ist.

Die unendliche Reihe in dem Produkt (2, 4) bricht wegen Lemma 2. 1 im Endlichen ab.

Lemma 2. 1: *Sei* $p^\theta \,\|\, k$ *und* $\gamma = \begin{cases} \theta + 2 \text{ für } p = 2, \\ \theta + 1 \text{ für } p > 2. \end{cases}$ *Ist* $t > \gamma$, *so ist* $W_{a,p^t,k} = 0$.

Beweis: Hua (12), Lemma 4, S. 70.

Lemma 2. 2:

(2, 5) $$W_{a,q,1} = \mu(q).$$

(2, 6) $$|W_{a,p,k}| \leqq ((k, p-1) - 1) \cdot \sqrt{p} + 1 \leqq k \cdot \sqrt{p}.$$

(2, 7) $$W_{a,q,k} = O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \quad \textit{für } k \geqq 2.$$

Beweis: Für (2, 6) Vinogradov (28), Chap. II, Lemma 3, unter Beachtung der Tatsache, daß $W_{a,p,k} = S_{a,p,k} - 1$ ist.

Für (2, 5) und (2, 7) Hua (12), Lemma 5, S. 70.

Lemma 2. 3:

(2, 8) $$|A(n, p)| \leqq 2^r \cdot \prod_{j=1}^{r} k_j \cdot p^{-\frac{r}{2}+1}.$$

(2, 9) $$|A(n, q)| = O\left(q^{-\frac{r}{2}+\varepsilon+1}\right).$$

Beweis: Wegen (2, 3) und (2, 6) folgt unter Beachtung von $(\varphi(p))^{-1} \leqq 2 \cdot p^{-1}$ unmittelbar (2, 8). (2, 9) folgt aus (2, 3) und (2, 7) unter Beachtung von

$$(\varphi(q))^{-1} \leqq c_{20} \cdot q^{-1} \cdot \log\log q \quad \text{für } q > 2$$

($c_{20} > 0$; vgl. Prachar (18), Satz 5. 1, Seite 24).

Lemma 2. 4: *$A(n, q)$ ist multiplikativ, d. h.*

$$A(n, q) = \prod_{p^\alpha \| q} A(n, p^\alpha).$$

Beweis: Ist im Beweise von Lemma 2. 5 (Teil I, Abschnitt II) enthalten.

Lemma 2. 5: *Sei $M(p^t, n)$ für ganzes, positives t die Lösungsanzahl der Kongruenz*

$$x_1^{k_1} + \cdots + x_r^{k_r} \equiv n \bmod p^t \quad \textit{mit} \quad 0 < x_j < p^t, \quad p \nmid x_j, \quad (j = 1, \ldots, r). \tag{2, 10}$$

Dann ist

$$1 + \sum_{d=1}^{t} A(n, p^d) = (\varphi(p^t))^{-r} \cdot p^t \cdot M(p^t, n). \tag{2, 11}$$

Beweis: (vgl. Hua (13), Lemma 1. 5, S. 337 und Vinogradov (28), Chap. II, Lemma 10):

$$\begin{aligned}
M(p^t, n) &= p^{-t} \cdot \sum_{a=1}^{p^t} \prod_{j=1}^{r} \sum_{\substack{x_j=1 \\ p \nmid x_j}}^{p^t} e\left(\frac{a}{p^t} \cdot x_j^{k_j}\right) \cdot e\left(-\frac{a}{p^t} \cdot n\right) \\
&= p^{-t} \cdot \sum_{d=0}^{t} \sum_{\substack{b=1 \\ (b,p)=1}}^{p^{t-d}} \prod_{j=1}^{r} \sum_{\substack{x_j=1 \\ p \nmid x_j}}^{p^t} e\left(\frac{b}{p^{t-d}} \cdot x_j^{k_j}\right) \cdot e\left(-\frac{b}{p^{t-d}} \cdot n\right) \\
&= p^{-t} \cdot \sum_{d=0}^{t} \frac{\varphi(p^t)^r}{\varphi(p^{t-d})^r} \cdot \sum_{\substack{b=1 \\ (b,p)=1}}^{p^{t-d}} \prod_{j=1}^{r} \sum_{\substack{x_j=1 \\ p \nmid x_j}}^{p^{t-d}} e\left(\frac{b}{p^{t-d}} \cdot x_j^{k_j}\right) \cdot e\left(-\frac{b}{p^{t-d}} \cdot n\right) \\
&= p^{-t} \cdot (\varphi(p^t))^r \cdot \sum_{d=0}^{t} (\varphi(p^{t-d}))^{-r} \sum_{\substack{b=1 \\ (b,p)=1}}^{p^{t-d}} \prod_{j=1}^{r} W_{b, p^{t-d}, k_j} \cdot e\left(-\frac{b}{p^{t-d}} \cdot n\right) \\
&= p^{-t} \cdot (\varphi(p^t))^r \cdot \left\{ 1 + \sum_{d=1}^{t} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^d} \frac{1}{(\varphi(p^d))^r} \cdot \prod_{j=1}^{r} W_{a, p^d, k_j} \cdot e\left(-\frac{a}{p^d} \cdot n\right) \right\} \\
&= p^{-t} \cdot (\varphi(p^t))^r \cdot \left\{ 1 + \sum_{1 \le d \le t} A(n, p^d) \right\}.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun einige spezielle Exponentenschemata k_j $(j = 1, \ldots, r)$ näher unter suchen, und zwar:

$$\left\{ \begin{array}{lll}
\text{a) } r = 2,\ k_1 = 1,\ k_2 = k & & 1, k \\
\text{b) } r = 3,\ k_1 = k_2 = 2,\ k_3 = k & & 2, 2, k \\
\text{c) } r = 5,\ k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 3,\ k_5 = k & \text{kurz:} & 3, 3, 3, 3, k \\
\text{d) } r = 4,\ k_1 = 2,\ k_2 = k_3 = 4,\ k_4 = k & & 2, 4, 4, k \\
\text{e) } r = 4,\ k_1 = 2,\ k_2 = 3,\ k_3 = 6,\ k_4 = k. & & 2, 3, 6, k.
\end{array} \right. \tag{2, 12}$$

Für die zugehörigen singulären Produkte erhalten wir auf Grund von Lemma 2. 1:

$$\mathfrak{S}_1(n, Q) = \prod_{p \le Q} (1 + A_1(n, p)); \; A_1(n, p) = \frac{\mu(p)}{\varphi(p)^2} \cdot \sum_{a=1}^{p-1} W_{a,p,k} \cdot e\left(-\frac{a}{p} \cdot n\right). \tag{2, 13}$$

$$\mathfrak{S}_2(n, Q) = \prod_{2 < p \le Q} (1 + A_2(n, p)) \cdot (1 + A_2(n, 2) + A_2(n, 4) + A_2(n, 8)). \tag{2, 14}$$

$$\mathfrak{S}_3(n, \infty) = \prod_{3 < p \le \infty} (1 + A_3(n, p)) \cdot (1 + A_3(n, 2) + A_3(n, 4)) \cdot (1 + A_3(n, 3) + A_3(n, 9)). \tag{2, 15}$$

$$\mathfrak{S}_4(n, Q) = \prod_{2 < p \le Q} (1 + A_4(n, p)) \cdot (1 + A_4(n, 2) + A_4(n, 4) + A_4(n, 8)). \tag{2, 16}$$

$$\mathfrak{S}_5(n, Q) = \prod_{2 < p \le Q} (1 + A_5(n, p)) \cdot (1 + A_5(n, 2) + A_5(n, 4)). \tag{2, 17}$$

$A_\sigma(n, q)$ $(\sigma = 2, \ldots, 5)$ ist durch (2, 3) mit (2, 12) bekannt. Wir suchen nun hinreichende Bedingungen dafür, daß $\mathfrak{S}_\sigma(n, Q) > 0$ ist.

Lemma 2. 6: *Sei* $n \equiv 0 \bmod 2$ *und* $n \not\equiv 1 \bmod p$ *für alle Primzahlen* $p > 2$ *mit* $(p-1) \mid k$. *Dann gibt es Konstanten* $c_{21} > 0$ *und* $c_{22} > 0$, *so daß*

$$c_{21} \cdot (\log Q)^{-(k+1)} < \mathfrak{S}_1(n, Q) < c_{22} \cdot (\log Q)^2$$

gilt.

Beweis: Nach Lemma 2. 5 ist, wenn $M(p, n)$ die Lösungsanzahl von $x_1 + x_2^k \equiv n \bmod p$ mit $p \nmid x_1 x_2$ bezeichnet:

$$A_1(n, p) = (p-1)^{-2} \cdot \{p \cdot M(p, n) - (p-1)^2\}.$$

Offensichtlich ist $M(p, n) = p - 1 - M'(p, n)$, wobei $M'(p, n)$ die Lösungsanzahl von $x_2^k \equiv n \bmod p$ mit $p \nmid x_2$ ist, also wird:

$$A_1(n, p) = -(p-1)^{-2} \cdot \{p \cdot M'(p, n) - (p-1)\}.$$

Da $0 \leqq M'(p, n) \leqq k$ ist, so gilt:

$$\frac{2}{p} \geqq \frac{1}{p-1} \geqq A_1(n, p) \geqq \frac{1}{p-1} - \frac{kp}{(p-1)^2},$$

also

$$(2, 18) \qquad |A_1(n, p)| \leqq \frac{\max(p-1;\ kp - p + 1)}{(p-1)^2} \leqq \frac{k+1}{p} \text{ für } p > 2k+1.$$

Für $p = 2$ ist $1 + A_1(n, 2) = 2 > 0$. Für $2 < p \leqq 2k+1$ ist $0 \leqq M'(p, n) \leqq p - 2$ nach Teil I, Satz II, 1, Korollar. Also ist $1 + A_1(n, p) > 0$. Somit ist:

$$\mathfrak{S}_1(n, Q) = \prod_{2 \leq p \leq 2k+1} (1 + A_1(n, p)) \cdot \prod_{2k+1 < p \leq Q} (1 + A_1(n, p))$$
$$= c_{23} \cdot \prod_{2k+1 < p \leq Q} (1 + A_1(n, p)) \quad \text{mit } c_{23} > 0.$$

Und es ist nach Prachar (18), Satz 5. 5 (S. 28) und Satz 4. 1 (S. 20):

$$\prod_{2k+1 < p \leq Q} (1 + A_1(n, p)) \geqq \prod_{2k+1 < p \leq Q} \left(1 - \frac{k+1}{p}\right) \geqq c' \cdot \prod_{p \leq Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k+1} \geqq c'_{21} \cdot (\log Q)^{-(k+1)}$$
$$(c'_{21} > 0)$$

und

$$\prod_{2k+1 < p \leq Q} (1 + A_1(n, p)) \leqq \prod_{p \leq Q} \left(1 + \frac{2}{p}\right) \leqq c'' \cdot \prod_{p \leq Q} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^2 \leqq c'_{22} \cdot (\log Q)^2,$$
$$(c'_{22} > 0).$$

Lemma 2. 7: *Sei*

a) *falls k ungerade,* $n \not\equiv 0 \bmod 2$, $n \not\equiv 2 \bmod 3$.

b) *falls k gerade:* $n \equiv 3 \bmod 24$,
$n \not\equiv 1 \bmod p$ *für alle Primzahlen p mit* $p \equiv 3 \bmod 4$ *und* $(p-1) \mid k$

und $n \not\equiv 0 \bmod 5$ *für* $4 \nmid k$
$n \not\equiv 0,\ 2 \bmod 5$ *für* $4 \mid k$.

Dann ist mit positiven, von Q unabhängigen Konstanten $c_{24}, \ldots, c_{27}$

$$c_{24} \cdot (\log Q)^{-c_{25}} < \mathfrak{S}_2(n, Q) < c_{26} \cdot (\log Q)^{+c_{27}}.$$

Beweis: Folgt aus Hua (12), Lemma 13 bis 17 und 19; bezüglich der Formulierung vgl. man das dortige Theorem 1.

Lemma 2. 8 (Chowla-Davenport): *Sei $l \geqq 1$ ganz. $x_1, \ldots, x_m$ mögen zu m verschiedenen Restklassen* mod p^l, *$y_1, \ldots, y_s$ zu s verschiedenen Restklassen* mod p *gehören. Dann stellt $x_i + y_j$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, s)$ mindestens* min $(p^l, m + s - 1)$ *verschiedene Restklassen* mod p^l *dar.*

Beweis: Vgl. z. B. Hua (13), Lemma 1. 6.

Lemma 2. 9: *Sei $\delta = (k, p-1)$. Für $1 \leqq x \leqq p-1$ durchläuft dann x^k* mod p *genau $\frac{(p-1)}{\delta}$ verschiedene Reste.*

Beweis: $x^k \equiv y$ mod p hat für $(y, p) = 1$ genau δ oder 0 Lösungen.

Lemma 2. 10: *Die Kongruenz*

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + y^k \equiv n \bmod p, \quad p \nmid x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot y, \quad p \geqq 3$$

ist stets lösbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) $3 \nmid k$,

b) $3 \mid k$, $2 \nmid k$: $n \not\equiv 0 \bmod 7$,

c) $6 \mid k$: $n \not\equiv 0, 2 \bmod 7$.

Beweis: 1) Sei $p \geqq 13$. Nach Lemma 2. 9 gibt das Polynom x^3 mod p für $1 \leqq x \leqq p-1$ wenigstens $\frac{(p-1)}{3}$ inkongruente Reste. Mit Lemma 2. 8 folgt, daß $x_1^3 + x_2^3$ für $1 \leqq x_1, x_2 \leqq p-1$ wenigstens $\frac{2(p-1)}{3} - 1$ verschiedene Reste mod p gibt, und wiederum mit Lemma 2. 8 folgt, daß $x_1^3 + \cdots + x_4^3$ für $1 \leqq x_1, \ldots, x_4 \leqq p-1$ wenigstens $\min\left(p, \frac{4(p-1)}{3} - 2 - 1\right) = p$ verschiedene Reste mod p gibt. Also ist für $p \geqq 13$ die gegebene Kongruenz stets lösbar.

2) Sei $2 < p < 13$ und $3 \nmid (p-1)$. Dann gibt x^3 nach Lemma 2. 9 für $1 \leqq x \leqq p-1$ genau $p-1$ verschiedene Reste mod p, und die unter 1) verwandte Schlußweise ergibt leicht die Lösbarkeit der Kongruenz in diesem Falle.

Zu untersuchen bleibt somit nur noch $p = 7$.

3) Sei $p = 7$. Man verifiziert, daß $x_1^3 + \cdots + x_4^3$ für $7 \nmid x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ genau die Kongruenzwerte 0, 2, 3, 4, 5 mod 7 annimmt.

a) Im Falle $3 \nmid k$ gibt y^k für $7 \nmid y$ nach Lemma 2. 9 wenigstens 3 Kongruenzwerte mod 7, und $x_1^3 + \cdots + x_4^3 + y^k$ nach Lemma 2. 8 wenigstens $\min(7, 5 + 3 - 1) = 7$ Kongruenzwerte.

b) Im Falle $3 \mid k$, $2 \nmid k$ ist $y^k \equiv +1$ oder -1 mod 7 für $7 \nmid y$. Somit nimmt $x_1^3 + \cdots + x_4^3 + y^k$ alle Kongruenzwerte mod 7 außer 0 an.

c) Im Falle $6 \mid k$ ist $y^k \equiv 1$ mod 7 für $7 \nmid y$, und $x_1^3 + \cdots + x_4^3 + y^k$ nimmt für $7 \nmid x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot y$ alle Kongruenzwerte mod 7 außer 0 und 2 an.

Lemma 2. 11: *Es sei $n \equiv 1$ mod 2 und*

$$n \not\equiv -2, 0, +2 \bmod 9 \ \textit{für}\ 3 \mid k,\ 2 \nmid k,$$
$$n \not\equiv -2, 0, 2, 4 \bmod 9 \ \textit{für}\ 6 \mid k.$$

Dann ist

$$1 + A_3(n, 2) + A_3(n, 4) \geqq 4 \cdot 2^{-5},$$
$$1 + A_3(n, 3) + A_3(n, 9) \geqq 9 \cdot 6^{-5}.$$

Beweis: Nach Lemma 2. 5 genügt es zu zeigen, daß unter den angegebenen Voraussetzungen die Kongruenzen

$$(2, 18) \qquad x_1^3 + \cdots + x_4^3 + y^k \equiv n \bmod 4 \quad \text{mit } 2 \nmid x_1 \cdots x_4 \cdot y$$

bzw. im Falle $3 \nmid k$ (dann ist nämlich nach Lemma 2. 1 $A_3(n, 9) = 0$)

$$(2, 19) \qquad x_1^3 + \cdots + x_4^3 + y^k \equiv n \bmod 3 \quad \text{mit } 3 \nmid x_1 \cdots x_4 \cdot y$$

bzw. im Falle $3 \mid k$

$$(2, 20) \qquad x_1^3 + \cdots + x_4^3 + y^k \equiv n \bmod 9 \quad \text{mit } 3 \nmid x_1 \cdots x_4 \cdot y$$

jeweils wenigstens eine Lösung besitzen. Für (2, 18) ist dies leicht zu verifizieren, die Lösbarkeit von (2, 19) ist in Lemma 2. 10 enthalten. Man rechnet nach, daß für $3 \nmid x_1 \cdots x_4$ die Summe $x_1^3 + \cdots + x_4^3 \bmod 9$ genau die Kongruenzwerte 0, 2, 4, 5, 7 annehmen kann. Da für ungerades k und $3 \mid k$ und $3 \nmid y$

$$y^k \equiv \pm 1 \bmod 9$$

ist, so ist

$$x_1^3 + \cdots + x_4^3 + y^k \equiv 1, 3, 4, 5, 6, 8 \bmod 9.$$

Für gerades k und $3 \mid k$ und $3 \nmid y$ ist $y^k \equiv 1 \bmod 9$, also

$$x_1^3 + \cdots + x_4^3 + y^k \equiv 1, 3, 5, 6, 8 \bmod 9,$$

woraus die Behauptung folgt.

Lemma 2. 12: *Es sei $n \equiv 1 \bmod 2$. Weiter sei*

$$\left.\begin{array}{l} n \not\equiv 0, +2, -2 \bmod 9 \\ n \not\equiv 0 \bmod 7 \end{array}\right\} \textit{für } 3 \mid k,\ 2 \nmid k$$

$$\left.\begin{array}{l} n \not\equiv 0, 2, 4, 7 \bmod 9 \\ n \not\equiv 0, 2 \bmod 7 \end{array}\right\} \textit{für } 6 \mid k.$$

Dann gibt es zwei von n unabhängige positive Konstanten c_{28} und c_{29}, so daß

$$0 < c_{28} \leqq \mathfrak{S}_3(n, \infty) \leqq c_{29}$$

gilt.

Beweis: Nach Lemma 2. 3 ist $|A_3(n, p)| \leqq 2^5 \cdot 3^4 \cdot k \cdot p^{-\frac{3}{2}}$, also

$$\prod_{p \geqq (2^5 \cdot 3^4 \cdot k)^4} (1 + A_3(n, p)) \geqq \prod_{p \geqq (2^5 \cdot 3^4 \cdot k)^4} \left(1 - p^{-\frac{5}{4}}\right) \geqq c'_{28} > 0$$

bzw.

$$\leqq \prod_{p \geqq 2} \left(1 + p^{-\frac{5}{4}}\right) \leqq c'_{29},$$

und

$$(1 + A_3(n, 2) + A_3(n, 4)) \cdot (1 + A_3(n, 3) + A_3(n, 9)) \prod_{3 < p < (2^5 \cdot 3^4 \cdot k)^4} (1 + A_3(n, p))$$

ist nach Lemma 2. 5, 2. 10 und 2. 11 unter den angegebenen Voraussetzungen größer bzw. kleiner als eine positive, von n unabhängige Konstante c''_{28} bzw. c''_{29}.

Lemma 2. 13: *Es sei $p \geqq 3$, $(p-1) \nmid k$. Dann gibt für $1 \leqq x, y \leqq p-1$ der Ausdruck*

$$x^2 + y^k \bmod p$$

wenigstens $\frac{3}{4} \cdot p - \frac{5}{4}$ verschiedene Kongruenzwerte.

Beweis: Wir verwenden die Methode, die Roth in (21), Lemma 24 und 25 angewandt hat. Wegen $(p-1) \nmid k$ gibt es Zahlen y und $-a$ mit $p \nmid y$ und $-a \not\equiv 1 \bmod p$ und $y^k \equiv -a \bmod p$.

Die Kongruenz $x^2 + y^k \equiv u \bmod p$ ist mit $x \not\equiv 0 \bmod p$ und $y = 1$ lösbar, wenn $(u-1) \not\equiv 0 \bmod p$ quadratischer Rest mod p ist. Es gibt $\frac{p-1}{2}$ solche ebengenannten

quadratischen Reste. Die Kongruenz $x^2 + y^k \equiv u \bmod p$ ist ebenfalls lösbar, wenn $(u-1) \not\equiv 0 \bmod p$ quadratischer Nichtrest, aber $(u+a) \not\equiv 0 \bmod p$ quadratischer Rest mod p ist, und zwar wieder mit $x \not\equiv 0 \bmod p$ und $y \not\equiv 0 \bmod p$. Es bezeichne $\left(\frac{u}{p}\right)$ das Legendresymbol.

Sei $b(p)$ die Anzahl der Zahlen u mit $(u-1) \not\equiv 0 \bmod p$, $(u+a) \not\equiv 0 \bmod p$ und $\left(\frac{u-1}{p}\right) = -1$; $\left(\frac{u+a}{p}\right) = +1$.

Dann gibt $x^2 + y^k$ $(p \nmid x, p \nmid y)$ wenigstens $\frac{p-1}{2} + b(p)$ verschiedene Kongruenzwerte mod p. Um die Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß $4 \cdot b(p) \geqq p-3$ ist. Es ist

$$4 \cdot b(p) = \sum_{\substack{u=2 \\ u+a \not\equiv 0 \bmod p}}^{p} \left(-\left(\frac{u-1}{p}\right) + 1\right) \cdot \left(\left(\frac{u+a}{p}\right) + 1\right)$$

$$= \sum_{\substack{u=2 \\ u \not\equiv -a \bmod p}}^{p} \left\{-\left(\frac{u-1}{p}\right) - \left(\frac{(u-1)(u+a)}{p}\right) + 1 + \left(\frac{u+a}{p}\right)\right\}.$$

Nun ist nach Landau (15), Satz 79 $\sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right) = 0$, also wird:

$$4 \cdot b(p) = \left(\frac{-a-1}{p}\right) + p - 2 - \left(\frac{a+1}{p}\right) - \sum_{\substack{u=2 \\ u \not\equiv -a \bmod p}}^{p} \left(\frac{(u-1)(u+a)}{p}\right).$$

Nun stellt $(u-1)(u_1-1) \equiv (a+1)^2 \bmod p$ eine eineindeutige Beziehung zwischen den Zahlen u mit $2 \leqq u \leqq p$, $u \not\equiv -a \bmod p$, und den Zahlen u_1 mit $2 \leqq u_1 \leqq p$, $u_1 \not\equiv -a \bmod p$ her. Außerdem ist

$$\begin{aligned}(u_1-1)^2 \cdot (u-1) \cdot (u-1+1+a) &\equiv (a+1)^2 \cdot \big((u_1-1)(u-1) + (u_1-1)(a+1)\big) \\ &\equiv (a+1)^3 \cdot \big((a+1) + (u_1-1)\big) \\ &\equiv (a+1)^3 \cdot (a+u_1) \bmod p.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\sum_{\substack{u=2 \\ u \not\equiv -a \bmod p}}^{p} \left(\frac{(u-1)(u+a)}{p}\right) = \sum_{\substack{u=2 \\ u \not\equiv -a \bmod p}}^{p} \left(\frac{(u_1-1)^2 (u-1)(u-1+1+a)}{p}\right)$$

$$= \left(\frac{a+1}{p}\right) \cdot \sum_{\substack{u_1=2 \\ u_1 \not\equiv -a \bmod p}}^{p} \left(\frac{a+u_1}{p}\right) = -\left(\frac{a+1}{p}\right)\left(\frac{a+1}{p}\right) = -1.$$

Mit diesem Ergebnis wird

$$4 \cdot b(p) = p - 2 + \left(\frac{-a-1}{p}\right) - \left(\frac{a+1}{p}\right) + 1 \geqq p - 3.$$

Lemma 2.14: *Sei $p > 2$. Hinreichend für die Lösbarkeit der Kongruenz*

$$x^2 + y^4 + z^4 + v^k \equiv n \bmod p \tag{2, 21}$$

in ganzen Zahlen x, y, z, v mit $p \nmid x \cdot y \cdot z \cdot v$ ist eine der folgenden Bedingungen:

a) $p \geqq 17$ *und* $(p-1) \nmid k$

b) $p \geqq 7$ *und* $p \equiv 3 \bmod 4$.

c) $p = 3$ *und* $n \not\equiv 0 \bmod 3$ *für* $2 \nmid k$ *bzw.* $n \equiv 1 \bmod 3$ *für* $2 \mid k$.

d) $p = 5$ *und* $n \not\equiv 1, 3 \bmod 5$ *für* $2 \mid k,\ 4 \nmid k,$
$n \not\equiv 0, 1, 3 \bmod 5$ *für* $4 \mid k,$
n *beliebig für* $2 \nmid k$.

e) $p = 13$.

f) $p \geqq 17$ *und* $p \equiv 1 \bmod 4$.

Beweis: a) Nach Lemma 2.8 gibt $y^4 + z^4$ wenigstens $\frac{p-3}{2}$ verschiedene Kongruenzwerte mod p für $1 \leqq y,\ z \leqq p-1$. Nach Lemma 2.13 gibt $x^2 + v^k$ für $p \nmid x \cdot v$, $(p-1) \nmid k$, $p \geqq 3$ wenigstens $\frac{3p-5}{4}$ verschiedene Kongruenzwerte mod p; somit gibt

$$x^2 + y^4 + z^4 + v^k \text{ für } p \geqq 17$$

nach Lemma 2.8 mindestens $\min\left(p, \frac{p-3}{2} + \frac{3}{4}p - \frac{5}{4} - 1\right) = p$ verschiedene Kongruenzwerte mod p.

b) Für $p \equiv 3 \bmod 4$ ist $(p-1, 4) = 2$, also gibt y^4 mit $p \nmid y$ nach Lemma 2.9 genau $\frac{p-1}{2}$ verschiedene Kongruenzwerte. Zweimalige Anwendung von Lemma 2.8 liefert, daß $x^2 + y^4 + z^4$ für $p \geqq 7$ und $p \nmid x \cdot y \cdot z$ wenigstens p verschiedene Kongruenzwerte mod p gibt.

c) Für $p = 3$ und $3 \nmid x \cdot y \cdot z$ ist $x^2 + y^4 + z^4 \equiv 0 \bmod 3$, so daß die Kongruenz (2, 21) äquivalent mit $v^k \equiv n \bmod 3$, $3 \nmid v$, wird. Diese ist genau dann lösbar, wenn $n \not\equiv 0 \bmod 3$ und $2 \nmid k$, oder $n \equiv 1 \bmod 3$ und $2 \mid k$ ist.

d) Für $5 \nmid y \cdot z$ ist $y^4 + z^4 \equiv 2 \bmod 5$, also (2, 21) äquivalent mit $x^2 + v^k \equiv n - 2 \bmod 5$. Für $5 \nmid x$ ist $x^2 \equiv \pm 1 \bmod 5$. Ist k ungerade, so ist $v^k \equiv n - 2 - x^2 \bmod 5$ stets lösbar mit $5 \nmid x \cdot v$. Im Falle $2 \mid k$, $4 \nmid k$ ist $v^k \equiv \pm 1 \bmod 5$, falls $5 \nmid v$. Also ist $x^2 + v^k \equiv n \bmod 5$ genau für $n \equiv 0, 2, 4 \bmod 5$ mit $5 \nmid x \cdot v$ lösbar. Im Falle $4 \mid k$ ist $v^k \equiv 1 \bmod 5$ für $5 \nmid v$, und $x^2 + v^k \equiv n - 2 \bmod 5$ ist genau dann mit $5 \nmid x \cdot v$ lösbar, wenn $n \equiv 2$ oder $4 \bmod 5$ ist.

e) Für $p = 13$ verifiziert man leicht, daß $x^2 + y^4 + z^4$ mit $13 \nmid x \cdot y \cdot z$ alle Kongruenzwerte mod 13 annimmt, so daß (2, 21) stets lösbar ist.

f) [4]).

Lemma 2.15: *Sei* $p > 2$. *Hinreichend für die Lösbarkeit der Kongruenz*

$$x^2 + y^3 + z^6 + v^k \equiv n \bmod p \text{ mit } p \nmid x \cdot y \cdot z \cdot v \tag{2, 22}$$

ist eine der folgenden Bedingungen:

a) $p \geqq 17$ *und* $(p-1) \nmid k$.

b) $p \geqq 5$ *und* $p \equiv -1 \bmod 3$.

c) $p = 3$ *und* $n \not\equiv 0 \bmod 3$ *für* $2 \mid k$,
n *beliebig für* $2 \nmid k$.

d) $p = 7$ *und* $n \not\equiv \pm 1 \bmod 7$ *für* $6 \mid k$,
$n \not\equiv -1 \bmod 7$ *für* $3 \mid k,\ 2 \nmid k$.
n *beliebig für* $3 \nmid k$.

e) $p = 13$ *oder* $p = 19$.

f) $p \geqq 31$.

---

[4]) Wie bei *Hasse*, Vorlesungen über Zahlentheorie, Berlin 1950, S. 152—155, zeigt man, daß für $p \equiv 1 \bmod 4$ die Lösungsanzahl der Kongruenz $x^2 + y^4 \equiv u \bmod p$ mit $p \nmid xy$ größer als $p - 1 - 2\sqrt{p} - 6 \geqq 1$ für $p \geqq 17$ ist.

Der *Beweis* verläuft völlig analog dem Beweis von Lemma 2. 14.[5])

Lemma 2. 16: *Die Kongruenzen*

$$(2, 23) \qquad x^2 + y^4 + z^4 + v^k \equiv n \bmod 8, \; 2 \nmid x \cdot y \cdot z \cdot v$$

und

$$(2, 24) \qquad x^2 + y^3 + z^6 + v^k \equiv n \bmod 8, \; 2 \nmid x \cdot y \cdot z \cdot v$$

sind lösbar, wenn

$$n \equiv 0 \bmod 2 \text{ ist für } (2, 24),$$
$$n \equiv 0 \bmod 2 \text{ und } 2 \nmid k \text{ für } (2, 23),$$
$$n \equiv 4 \bmod 8 \text{ und } 2 \mid k \text{ für } (2, 23).$$

Beweis: Für $x \equiv 1, 3, 5, 7 \bmod 8$ ist $x^{2t} \equiv 1 \bmod 8$ und $x^{2t+1} \equiv 1, 3, 5, 7 \bmod 8$, $(t = 1, 2, \ldots)$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Lemma 2. 17: *Sei,*

falls k ungerade ist: $n \equiv 0 \bmod 2$ *und* $n \not\equiv 0 \bmod 3$.

falls k gerade ist:
$$n \equiv 4 \bmod 8,$$
$$n \equiv 1 \bmod 3,$$
$$n \not\equiv 1, 3 \bmod 5,$$
$$n \not\equiv 0 \bmod 5, \text{ falls } 4 \mid k.$$

Dann gibt es positive, von n und Q unabhängige Konstanten c_{30} und c_{31} mit

$$0 < c_{30} \cdot (\log Q)^{-2^4 \cdot 36 \cdot k} < \mathfrak{S}_4(n, Q) < c_{31} \cdot (\log Q)^{2^4 \cdot 36 \cdot k}.$$

Lemma 2. 18: *Sei,*

falls k ungerade ist: $n \equiv 0 \bmod 2$; $n \not\equiv -1 \bmod 7$, *wenn* $3 \mid k$;

falls k gerade ist:
$$n \equiv 0 \bmod 2,$$
$$n \not\equiv 0 \bmod 3,$$
$$n \not\equiv \pm 1 \bmod 7, \text{ falls } 6 \mid k.$$

Dann gibt es positive, von n und Q unabhängige Konstanten c_{32} und c_{33} mit

$$0 < c_{32} \cdot (\log Q)^{-2^4 \cdot 36 k} < \mathfrak{S}_5(n, Q) < c_{33} \cdot (\log Q)^{2^4 \cdot 36 k}.$$

Beweis für Lemma 2. 17 und 2. 18: Nach Lemma 2. 3 ist

$$|A_4(n, p)| \leqq 2^4 \cdot 32 \cdot \frac{k}{p} < 2^4 \cdot 36 \cdot \frac{k}{p} \text{ und } |A_5(n, p)| \leqq 2^4 \cdot 36 \cdot \frac{k}{p}.$$

Somit ist in beiden Fällen

$$\prod_{2^5 \cdot 36 \cdot k < p \leqq Q} (1 + A_j(n, p)) \geqq \prod_{2^5 \cdot 36 \cdot k < p \leqq Q} \left(1 - \frac{2^4 \cdot 36 \cdot k}{p}\right) \geqq c' \cdot (\log Q)^{-2^4 \cdot 36 \cdot k}$$

bzw.

$$\leqq c'' \cdot (\log Q)^{2^4 \cdot 36 \cdot k} \qquad (j = 4, 5),$$

wegen Prachar (18), Satz 4. 1 und 5. 5 auf S. 20 und 28. Daß

$$0 < c''' \leqq \prod_{2 < p \leqq 2^5 \cdot 36 k} (1 + A_j(n, p)) \cdot \{1 + A_j(n, 2) + A_j(n, 4) + A_j(n, 8)\} \leqq c''''$$

gilt, folgt aus Lemma 2. 14, 2. 15 und 2. 16 in Verbindung mit Lemma 2. 5.

---

[5]) f) folgt aus Lemma 2. 13 und 2. 8, angewandt auf

$$x^2 + z^6 + y^3 = u \bmod p.$$

3. Ein weiterer Satz über das „Singuläre Produkt".

Sei:

(3, 1) $P = [\sqrt[k]{N}]$ (N hinreichend groß, $k \geqq 1$ ganz).

(3, 2) η sei eine kleine, fest gewählte Zahl mit $0 < \eta < \frac{1}{8}$.

Die ganze Zahl $w > 0$ sei fest vorgegeben.

(3, 3) $\sigma_0 = 1,\ \sigma_1 = 2 - \eta,\ \sigma_3 = 3 - 2\eta, \ldots, \sigma_w = w + 1 - w \cdot \eta$.

(3, 4) $X = \left[\log P \cdot \frac{k - \frac{1}{2}}{20} \cdot \frac{\eta}{w \cdot \sigma_w}\right]$.

(3, 5) $B(n, q)$ sei eine zahlentheoretische Funktion von q und n mit folgenden Eigenschaften:

a) $B(n, q)$ ist multiplikativ, d. h. $B(n, q) = \prod_{p^\pi \| q} B(n, p^\pi)$.

b) Es ist $|B(n, p)| \leqq c'_{34} \cdot p^{-1}$ und $|B(n, q)| \leqq (c_{34})^{\nu(q)} \cdot q^{-1}$ mit von n und p bzw. q unabhängigen Konstanten $c'_{34} > 0$ und $c_{34} > 1$. $\nu(q)$ bezeichnet die Anzahl der Primteiler von q.

c) Es ist $B(n, p^f) = 0$ für $p > 2,\ f \geqq 2,\ f$ ganz.

d) Es ist $B(n, 2^t) = 0$ für $t \geqq 4,\ t$ ganz.

e) $B(n + q, q) = B(n, q)$.

f) $\sum_{n=1}^{q_1 q_2} B(n, q_1) \cdot B(n, q_2) = 0$ für $q_1 \neq q_2$.

(3, 6) $Q = [X^{\sigma_w}]$.

(3, 7) $\mathfrak{S}(n, Q) = \prod_{2 < p \leqq Q} (1 + B(n, p)) \cdot (1 + B(n, 2) + B(n, 4) + B(n, 8))$.

(3, 8) $\mathfrak{S}'(n) = \sum_{q \leqq (\log N)^A} B(n, q)$; A ist eine feste, von k abhängige Zahl.

Dann gilt

Satz 1: $\sum_{n=1}^{P^k} (\mathfrak{S}(n, Q) - \mathfrak{S}'(n))^2 = O\left(P^k \cdot (\log P)^{-(w+1)+w\eta+\varepsilon}\right)$.

Lemma 3. 1: *Y sei eine hinreichend große Zahl. Dann gilt:*

$$\exp\left(Y\left(1 - \frac{1}{\log Y}\right)\right) \leqq \prod_{p \leqq Y} p \leqq \exp\left(Y\left(1 + \frac{1}{\log Y}\right)\right). \tag{3, 9}$$

(3, 10) *Aus den Primzahlen $p \leqq Y$ lassen sich höchstens $2^{\pi(Y)}$ verschiedene quadratfreie Produkte bilden.*

Beweis: Nach Estermann (7), S. 15 ist

$$\sum_{p \leqq Y} \log p = Y + O\left(Y \cdot \exp\left(-\frac{1}{200}\sqrt{\log Y}\right)\right),$$

woraus (3, 9) folgt.

(3, 10) folgt einfach durch Abzählen der möglichen Produkte.

Lemma 3. 2: *Die Funktion*

$$h(z) = \left(\frac{C}{z}\right)^z,\ 0 < z < \infty,\ C > 0$$

hat an der Stelle $z_0 = \frac{1}{e} \cdot C$ *ein Maximum;* $h(z)$ *ist in* $0 < z < z_0$ *monoton steigend und in* $z_0 < z < \infty$ *monoton fallend.*

Beweis:

$$\frac{d}{dz} h(z) = h(z) \cdot (\log C - 1 - \log z).$$

Lemma 3. 3:

$$(3, 11) \qquad \mathfrak{S}'(n) - \mathfrak{S}(n, Q) = \sum_{X^{\sigma_w} \leq q \leq P^{\frac{19}{40}\left(k-\frac{1}{2}\right)}} \theta(q) \cdot B(n, q) + O\left(\exp\left(-\frac{7}{2} \cdot X\right)\right),$$

wobei $\theta(q) = 0, +1$ *oder* -1 *unabhängig von* n *ist.*

Vorbemerkung: Es ist $B(n, q) = 0$ (nach (3, 5) d) und e)), falls für eine Primzahl p mit $p > 2$ gilt: $p^2 \mid q$, oder falls $16 \mid q$. Wir brauchen daher nur über solche q zu summieren, die weder durch ein p^2 mit $p > 2$ noch durch 16 teilbar sind; dies deuten wir durch einen Strich $'$ am Summenzeichen an. Wir sagen der Kürze halber, daß ein q, für das $p^2 \nmid q$ für jedes $p > 2$ und $16 \nmid q$ gilt, die Eigenschaft E_2 hat.

Beweis: Wir erhalten durch Ausmultiplizieren, daß

$$(3, 12) \qquad \mathfrak{S}(n, Q) = \sum_{1 \leq q \leq 8 \cdot \prod_{2 < p \leq X^{\sigma_w}} p}' \vartheta(q) \cdot B(n, q)$$

gilt. Dabei ist $\vartheta(q) = 0$ oder $+1$, unabhängig von n. Wenn $q \leqq X^{\sigma_w}$ ist und q die Eigenschaft E_2 hat, so ist stets $\vartheta(q) = +1$.

Wir betrachten nun die in der Summe in (3, 12) auftretenden q mit der Eigenschaft E_2 und mit $\vartheta(q) = +1$, die genau t_m Primfaktoren p_m mit $X^{\sigma_{m-1}} < p_m \leqq X^{\sigma_m}$ enthalten $(m = 1, \ldots, w)$. Aus Primzahlen p mit $2 < p \leqq X$ lassen sich, wenn $\pi(X) = \sum_{p \leq X} 1$ ist, höchstens $2^{\pi(X)}$ verschiedene quadratfreie Produkte bilden. Demnach ist die Anzahl der genannten q, die also genau t_m Primfaktoren mit $X^{\sigma_{m-1}} < p_m \leqq X^{\sigma_m}$ enthalten, höchstens:

$$(3, 13) \qquad 4 \cdot 2^{\pi(X)} \cdot \binom{\pi(X^{\sigma_1})}{t_1} \cdots \binom{\pi(X^{\sigma_w})}{t_w}.$$

Wir setzen $t = t_1 + \cdots + t_w$. Nach Lemma 3. 1 ist das Achtfache des Produktes aller Primzahlen $\neq 2$ unterhalb X höchstens $\exp(2X)$. Das Produkt von t Primzahlen, die zwischen X und X^{σ_w} liegen, ist höchstens $X^{\sigma_w \cdot t} = \exp(\sigma_w \cdot t \cdot \log X)$. Somit ist, wenn wir $t \leqq \frac{X}{\log X} \cdot \frac{9 \cdot w}{\eta}$ voraussetzen:

$$q \leqq \exp\left(2X + \frac{9 \cdot w}{\eta} \cdot \frac{X}{\log X} \cdot \sigma_w \cdot \log X\right) < P^{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{80}+\frac{9}{20}\right)} \leqq P^{\frac{19}{40}\left(k-\frac{1}{2}\right)}.$$

Wir zerteilen dementsprechend die Summe in (3, 12) wie folgt:

$$(3, 14) \qquad \sum_{1 \leq q \leq 8 \cdot \prod_{2 < p < X^{\sigma_w}} p}' \vartheta(q) \cdot B(n, q) = \sum_{1 \leq q \leq P^{\frac{19}{40}\left(k-\frac{1}{2}\right)}}' \vartheta(q) \cdot B(n, q) + \sum_{P^{\frac{19}{40}\left(k-\frac{1}{2}\right)} < q \leq 8 \cdot \prod_{2 < p < X^{\sigma_w}} p}' \vartheta(q) \cdot B(n, q) = \Sigma_{\mathrm{I}} + \Sigma_{\mathrm{II}}.$$

Ist nun $q > P^{\frac{19}{40}\left(k-\frac{1}{2}\right)}$, so enthält q notwendig t Primfaktoren $p > X$ mit $t > \frac{X}{\log X} \cdot \frac{9 \cdot w}{\eta}$.

Nach dem Schubfachprinzip folgt, daß für wenigstens ein t_m, etwa t_j gilt:

$$t_j > \frac{X}{\log X} \cdot \frac{9}{\eta}.$$

Wegen (3, 5b) ist mit einer von n und q unabhängigen Konstanten $c_{34} > 1$, wenn $\nu(q)$ die Anzahl der Primteiler von q bezeichnet:

$$(3, 15) \qquad |B(n, q)| \leqq \frac{(c_{34})^{\nu(q)}}{q} \leqq \frac{(c_{34})^{t_1 + \cdots + t_w + \pi(X)}}{X^{\sigma_0 t_1 + \sigma_1 t_2 + \cdots + \sigma_{w-1} t_w}}.$$

Hieraus folgt mit (3, 13) und Lemma (3. 1) $\left(8 \cdot \prod_{p \leqq X} p < \exp(X(1+\varepsilon))\right)$:

$$(3, 16) \qquad |\Sigma_{\mathrm{II}}| = \Big| \sum_{P^{\frac{19}{40}\left(k-\frac{1}{2}\right)} < q \leqq 8 \cdot \prod\limits_{2 < p \leqq X^{\sigma_w}} p}{}' \vartheta(q) \cdot B(n, q) \Big|$$

$$\leqq 8 \cdot \prod_{p \leqq X} p \cdot \sum_{t_1, \ldots, t_w} \text{(Anzahl der } B(n, q) \text{ mit } E_2, \text{ die genau } t_m \text{ Primfaktoren } p_m \text{ enthalten)}$$

$$\times |B(n, q)| \leqq (c_{34})^{\pi(X)} \cdot \exp\left(X(1+\varepsilon)\right) \cdot \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{w} \sum_{t_m = 0}^{\pi(X^{\sigma_m})} \frac{(c_{34})^{t_m}}{X^{\sigma_{m-1} \cdot t_m}} \cdot \binom{\pi(X^{\sigma_m})}{t_m}$$

$$\times \sum_{\frac{X}{\log X} \cdot \frac{9}{\eta} < t_j \leqq \pi(X^{\sigma_j})} \left(\frac{c_{34}}{X^{\sigma_{j-1}}}\right)^{t_j} \cdot \binom{\pi(X^{\sigma_j})}{t_j}.$$

Nun schätzen wir die einzelnen Summen unter Beachtung von $\binom{\pi(X^{\sigma})}{t} \leqq \frac{e^t \cdot X^{\sigma t}}{t^t}$ ab:

$$(3, 17) \qquad \sum_{t_m = 0}^{\pi(X^{\sigma_m})} \left(\frac{c_{34}}{X^{\sigma_{m-1}}}\right)^{t_m} \binom{\pi(X^{\sigma_m})}{t_m}$$

$$\leqq 1 + \sum_{t_m = 1}^{X^{\sigma_m}} \exp\left\{t_m \log c_{34} - t_m \sigma_{m-1} \log X + t_m + t_m \sigma_m \log X - t_m \log t_m\right\}$$

$$\leqq 1 + \sum_{t_m = 1}^{X^{\sigma_m}} \exp\left\{t_m \cdot (1 + \log c_{34} + \log X \cdot (1 - \eta) - \log t_m)\right\}$$

$$\leqq 1 + \sum_{t_m = 1}^{X^{\sigma_m}} \exp\left\{t_m \left(\log X \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\eta\right) - \log t_m\right)\right\}$$

$$= 1 + \sum_{t_m = 1}^{X^{\sigma_m}} \left(\frac{X^{1 - \frac{2}{3}\eta}}{t_m}\right)^{t_m}.$$

Nach Lemma 3. 2 wird das Maximum von $\left(X^{1-\frac{2}{3}\eta} \cdot t_m^{-1}\right)^{t_m}$ an der Stelle $t_{m,0} = \frac{1}{e} \cdot X^{1-\frac{2}{3}\eta}$ angenommen, ist also gleich $\exp\left(\frac{1}{e} \cdot X^{1-\frac{2}{3}\eta}\right)$ und aus (3, 17) wird für $m = 1, 2, \ldots, w$, $m \neq j$:

$$(3, 18) \qquad 1 + \sum_{t_m = 1}^{X^{\sigma_m}} \left(\frac{X^{1-\frac{2}{3}\eta}}{t_m}\right)^{t_m} < 1 + X^{\sigma_m} \cdot \exp\left(\frac{1}{e} \cdot X^{1-\frac{2}{3}\eta}\right) < \exp\left(X^{1-\frac{2}{3}\eta}\right).$$

Da $t_j > \frac{X}{\log X} \cdot \frac{9}{\eta}$ ist, gilt für die eine Summe mit $m = j$:

$$(3, 19) \qquad \sum_{\frac{X}{\log X} \cdot \frac{9}{\eta} < t_j \leqq \pi(X^{\sigma_j})} \left(\frac{c_{34}}{X^{\sigma_{j-1}}}\right)^{t_j} \cdot \binom{\pi(X^{\sigma_j})}{t_j} \leqq \sum_{\frac{X}{\log X} \cdot \frac{9}{\eta} < t_j \leqq X^{\sigma_j}} \left(\frac{X^{1-\frac{2}{3}\eta}}{t_j}\right)^{t_j} = \sum_{t_j}^{*}.$$

Hier würde auf Grund von Lemma 3. 2 das Maximum der Summenglieder $\left(X^{1-\frac{2}{3}\eta}\cdot t_j^{-1}\right)^{t_j}$ für $t_{j,0}=\frac{1}{e}\cdot X^{1-\frac{2}{3}\eta}$ erreicht. Da $t_j > t_{j,0}$ und $\left(X^{1-\frac{2}{3}\eta}\cdot t_j^{-1}\right)^{t_j}$ für $t_j > t_{j,0}$ monoton fällt, erhalten wir den größten Summanden an der unteren Summationsgrenze; demnach wird aus (3, 19):

$$(3,20)\quad \sum_{t_j}{}^{*} < X^{\sigma_j}\cdot\exp\left\{\frac{X}{\log X}\cdot\frac{9}{\eta}\left(-\frac{2}{3}\eta\log X+\log\log X+\log\eta-\log 9\right)\right\}$$
$$< \exp\left\{\frac{X}{\log X}\cdot\frac{9}{\eta}\left(-\frac{5}{9}\eta\cdot\log X\right)\right\}.$$

Nun folgt aus (3, 16) mit (3, 18) und (3, 20) für die Summe $|\Sigma_{\mathrm{II}}|$:

$$|\Sigma_{\mathrm{II}}| \leqq \exp\left\{\frac{2X}{\log X}\cdot\log c_{34}+X\cdot(1+\varepsilon)+(w-1)\cdot X^{1-\frac{2}{3}\eta}-5X\right\} < \exp\left(-\frac{7}{2}\cdot X\right)$$

für hinreichend großes X. Wir haben also bewiesen:

$$(3,21)\quad \mathfrak{S}(n,Q) = \sum_{1\leqq q\leqq P^{\frac{19}{40}\left(k-\frac{1}{2}\right)}}{}' \vartheta(q)\cdot B(n,q)+O\left(\exp\left(-\frac{7}{2}\cdot X\right)\right).$$

Da, wenn $q < X^{\sigma_w}$ ist und q die Eigenschaft E_2 besitzt, stets $\vartheta(q) = +1$ ist, erhalten wir:

$$(3,11)\quad \mathfrak{S}'(n)-\mathfrak{S}(n,Q) = \sum_{X^{\sigma_w}\leqq q\leqq P^{\frac{19}{40}\left(k-\frac{1}{2}\right)}}\theta(q)\cdot B(n,q)+O\left(\exp\left(-\frac{7}{2}X\right)\right),$$

wobei $\theta(q) = 0,\ +1$ oder -1 unabhängig von n ist.

Aus (3, 5b) folgt unter Beachtung von $(c_{34})^{\nu(q)} = O(q^{\varepsilon})$, daß $|B(n,q)| = O(q^{\varepsilon-1})$, also

$$\sum_{q\leqq P^{\frac{19}{40}\left(k-\frac{1}{2}\right)}}|B(n,q)| = O(P^{\varepsilon})$$

ist, und somit folgt aus (3, 11) mit (3, 4) und (3, 3):

$$(3,22)\quad (\mathfrak{S}'(n)-\mathfrak{S}(n,Q))^2 = \left(\sum_{X^{\sigma_w}\leqq q\leqq P^{\frac{19}{40}\left(k-\frac{1}{2}\right)}}\theta(q)\cdot B(n,q)\right)^2$$
$$+O\left(\exp\left(-\frac{7}{2}X\right)\right)+O\left(P^{\varepsilon}\cdot P^{-\frac{7\left(k-\frac{1}{2}\right)}{40}\cdot\frac{\eta}{w\cdot\sigma_w}}\right)$$
$$=\left(\sum_q\theta(q)\cdot B(n,q)\right)^2+O\left(P^{-\frac{1}{10}\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\eta}{w\cdot\sigma_w}}\right).$$

Aus (3, 22) folgt nun mit der Methode von Davenport-Heilbronn ((6), Lemma 15) sofort der

Satz 1:

$$\sum_{n=1}^{P^k}(\mathfrak{S}'(n)-\mathfrak{S}(n,Q))^2 = O\left(P^k\cdot(\log P)^{-(w+1)+w\eta+\varepsilon}\right).$$

Beweis: Nach (3, 22) ist

$$\sum_{n=1}^{P^k}(\mathfrak{S}'(n)-\mathfrak{S}(n,Q))^2 = \sum_n\left(\sum_q\theta(q)\cdot B(n,q)\right)^2+O\left(P^{k-\frac{1}{10}\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\eta}{w\cdot\sigma_w}}\right)$$

und

$$\sum_n \Big(\sum_q \theta(q)\cdot B(n,q)\Big)^2 = \sum_n \sum_{X^{\sigma_w}\le q\le P^{\frac{19}{40}\left(k-\frac{1}{2}\right)}} \theta(q)^2\cdot B(n,q)^2$$

$$+\,2\cdot \sum_{X^{\sigma_w}\le q_1<q_2\le P^{\frac{19}{40}\left(k-\frac{1}{2}\right)}} \theta(q_1)\cdot\theta(q_2)\cdot \sum_{n=1}^{P^k} B(n,q_1)\cdot B(n,q_2) = \Sigma_1+\Sigma_2.$$

Wegen $|B(n,q)| = O(q^{\varepsilon-1})$, was aus (3,5b) folgt, ist

$$\Sigma_1 = O\Big(P^k\cdot \sum_{X^{\sigma_w}\le q<\infty} q^{-2+\varepsilon'}\Big) = O\big(P^k\cdot X^{-\sigma_w+\varepsilon}\big),$$

also wegen (3,3) und (3,4)

$$\Sigma_1 = O\big(P^k\cdot(\log P)^{-(w+1)+w\eta+\varepsilon}\big).$$

Für $q_1\neq q_2$ ist wegen (3,5e) und (3,5f) $B(n+q_1q_2, q_i) = B(n,q_i)$, $(i=1,2)$ und $\sum_{n=1}^{q_1q_2} B(n,q_1)\cdot B(n,q_2) = 0$. Somit ist:

$$\Big|\sum_{n=1}^{P^k} B(n,q_1)\cdot B(n,q_2)\Big| \le \sum_{n=1}^{q_1q_2} |B(n,q_1)\cdot B(n,q_2)| \le q_1q_2\cdot O\big((q_1q_2)^{\varepsilon-1}\big) = O(q_1^\varepsilon q_2^\varepsilon)$$

(unter Verwendung von $|B(n,q)| = O(q^{\varepsilon-1})$). Damit wird

$$\Sigma_2 \ll \sum_{X^{\sigma_w}\le q_1<q_2\le P^{\frac{19}{40}\left(k-\frac{1}{2}\right)}} (q_1q_2)^\varepsilon = O\Big(P^{k-\frac{1}{80}}\Big),$$

und Satz 1 ist bewiesen.

Um Satz 1 anwenden zu können, müssen wir nachweisen, daß

$$(3,23) = (2,3)\qquad A_s(n,q) = (\varphi(q))^{-r}\cdot \sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}} \prod_{1\le j\le r} W_{a,q,k_j}\cdot e\Big(-\frac{a}{q}\cdot n\Big)$$

in den Fällen $s = 1, 2, 4, 5$ (vgl. (2, 12) a), b), d) und e)) die Eigenschaften (3,5a) bis (3,5f) besitzt. Der Fall (2, 12c) mit $s = 3$, $r = 5$, $k_1 = \cdots = k_4 = 3$, $k_5 = k$ wird gesondert behandelt (in Lemma 3. 5).

Lemma 3. 4: *Die durch* (3, 23) *gegebenen Funktionen* $A_s(n,q)$ $(s = 1, 2, 4, 5)$ *besitzen die Eigenschaften* (3, 5a) *bis* (3, 5f):

a) $A_s(n,q)$ *ist multiplikativ bezüglich* q.

b) $|A_s(n,p)| \le c'_{34}\cdot p^{-1}$, $|A_s(n,q)| \le (c_{34})^{\nu(q)}\cdot q^{-1}$.

c) $A_s(n,p^f) = 0$ *für* $p>2$, $f\ge 2$.

d) $A_s(n,2^t) = 0$ *für* $t\ge 4$.

e) $A_s(n+q,q) = A_s(n,q)$.

f) $\sum_{n=1}^{q_1q_2} A_s(n,q_1)\cdot A_s(n,q_2) = 0$ für $q_1\neq q_2$.

Beweis: a) ist richtig wegen Lemma 2. 4; c) und d) folgen unmittelbar aus Lemma 2.1, e) ist aus (2, 3) ersichtlich. Um b) zu beweisen, genügt es wegen a), c) und $|A_s(n,2^t)|\le 8$ für $t>0$, zu zeigen, daß

$$|A_s(n,p)| \le \frac{c'_{34}}{p}$$

ist. Wegen (2, 18) in Lemma 2. 6 ist

$$|A_1(n, p)| \leqq \frac{k+1}{p}.$$

Für $s = 2$ folgt aus dem Beweis von Hua (12), Lemma 17, S. 76, daß

$$|(p-1)^3 \cdot A_2(n, p)| \leqq (p+1) \cdot k \cdot p + 2 \cdot p(p-1)$$

ist, also, grob abgeschätzt,

$$|A_2(n, p)| \leqq \frac{4k+8}{p}.$$

Für $s = 4$ und $s = 5$ gibt Lemma 2. 3 (2, 8), die Behauptung.

f) Für $q_1 \neq q_2$ und $(a_1, q_1) = 1$ und $(a_2, q_2) = 1$ ist

$$a_1 q_2 + a_2 q_1 \not\equiv 0 \bmod q_1 q_2.$$

Somit ist wegen $\sum\limits_{n=1}^{q_1 q_2} e\left(-\frac{a_1 q_2 + a_2 q_1}{q_1 q_2} \cdot n\right) = 0$ (Vinogradov (28), Chap. I, Lemma 5)

$$\sum_{n=1}^{q_1 q_2} A_s(n, q_1) \cdot A_s(n, q_2) = \sum_{n=1}^{q_1 q_2} \sum_{a_1 \bmod q_1}{}' \sum_{a_2 \bmod q_2}{}' \cdot \prod_j W_{a_1, q_1, k_j} \cdot \prod_j W_{a_2, q_2, k_j} e\left(-\frac{a_1 q_2 + a_2 q_1}{q_1 q_2} \cdot n\right) = 0.$$

Lemma 3. 5: *Für* (2, 12c) ($s = 3$; $r = 5$, $k_1 = \cdots = k_4 = 3$, $k_5 = k$) *setzen wir*

$$\mathfrak{S}_3'(n) = \sum_{q \leqq (\log N)^A} A_3(n, q)$$

$$\mathfrak{S}_3'(n, \infty) = \sum_{q=1}^{\infty} A_3(n, q).$$

Mit (2, 15) *ist dann*

$$\mathfrak{S}_3(n, \infty) = \mathfrak{S}_3'(n, \infty) \tag{3, 24}$$

und

$$\sum_{n=1}^{P^k} (\mathfrak{S}_3'(n, \infty) - \mathfrak{S}_3'(n))^2 \ll P^k \cdot (\log N)^{-\frac{2}{3}A}. \tag{3, 25}$$

Beweis: Wegen Lemma 2. 3 (2, 9) ist $\mathfrak{S}_3'(n, \infty)$ absolut konvergent; nach Teil I, Lemma 2. 4 folgt (3, 24). (3, 25) folgt aus Lemma 2. 3 (2, 9):

$$|\mathfrak{S}_3'(n, \infty) - \mathfrak{S}_3'(n)| \ll \sum_{q > \log^A N} q^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \ll (\log N)^{-\frac{A}{3}}.$$

4. Analytischer Teil.

Wir führen folgende Bezeichnungen und Voraussetzungen ein: Die ganzen positiven Zahlen $k_1, \ldots, k_r$ ($r \geqq 2$) seien vorgegeben.

$$P = \left[N^{\frac{1}{k_r}}\right]. \tag{4, 1}$$

$$\tfrac{1}{2} P^{\varrho_j'} \leqq p_j \leqq P^{\varrho_j}, \quad 0 \leqq \varrho_j' \leqq \varrho_j, \quad \varrho_j > 0, \quad (j = 1, \ldots, r). \tag{4, 2}$$

$$\text{Sei } \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{r-1} \geqq k_r. \tag{4, 3}$$

(4, 4) Es sei entweder stets $\varrho_j = \frac{k_r}{k_j}$ ($j = 1, \ldots, r$) oder aber für wenigstens ein j_0 sei:

$$\varrho_{j_0}' = \varrho_{j_0} = \frac{k_r}{k_{j_0}}.$$

(4, 5) Es gelte für die Lösungsanzahl L der diophantischen Gleichung

$$p_1^{k_1} + \cdots + p_{r-1}^{k_{r-1}} = p_1'^{k_1} + \cdots + p_{r-1}'^{k_{r-1}}$$

in Primzahlen unter den Nebenbedingungen $\frac{1}{2} P^{\varrho_j'} \leqq p_j, p_j' \leqq P^{\varrho_j}$ $(j = 1, \ldots, r)$ die Abschätzung

$$L \ll P^{2(\varrho_1 + \cdots + \varrho_{r-1}) - k_r} \cdot (\log P)^{c_{35}}$$

mit einer von P unabhängigen Konstanten $c_{35} \geqq 0$.

(4, 6) = (2, 2)
$$W_{a,q,k_j} = \sum_{\substack{1 \leq x \leq q \\ (x,q)=1}} e\left(\frac{a}{q} \cdot x^{k_j}\right),$$

(4, 7)
$$F_j^*(\alpha) = \sum_{\frac{1}{2} P^{\varrho_j'} \leq p_j \leq P^{\varrho_j}} e(\alpha \cdot p_j^{k_j}) \qquad (j = 1, \ldots, r),$$

$$F^*(\alpha) = \prod_{j=1}^{r} F_j^*(\alpha),$$

(4, 8)
$$H_j(\beta) = \sum_{\max\left\{2, \left(\frac{P^{\varrho_j'}}{2}\right)^{k_j}\right\} \leq m \leq P^{\varrho_j k_j}} \frac{e(m\beta)}{m^{1-\frac{1}{k_j}} \cdot \log m};$$

(4, 9)
$$G_j^*(\alpha, a, q) = G_j^*(\alpha) = \frac{W_{a,q,k_j}}{\varphi(q)} \cdot H_j(\beta), \qquad \beta = \alpha - \frac{a}{q};$$

$$G^*(\alpha) = \prod_{j=1}^{r} G_j^*(\alpha);$$

(4, 10)
$$\omega_0 = \frac{(\log N)^\tau}{N}, \quad \tau \geqq 4A.$$

Dabei ist A eine fest gewählte Zahl mit

(4, 11)
$$A > c_{35} \cdot (4k_r + 4) \cdot 2^{2k_r} + (2k_r + 1) \cdot 2^{6k_r - 2}.$$

Wir teilen das Intervall $[-\omega_0, 1 - \omega_0]$ in bekannter Weise in Basis- und Supplement-Intervalle ein. Jedem Zahlenpaar a, q mit $(a, q) = 1$ und $0 < q \leqq (\log N)^A$ und $0 \leqq a < q$ ordnen wir als Basisintervall $\mathfrak{M}_{a,q}$ das Intervall $\mathfrak{M}_{a,q} = \left[\frac{a}{q} - \omega_0, \frac{a}{q} + \omega_0\right]$ zu. Sei $\mathfrak{M} = \sum_{1 \leq q \leq \log^A N} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ (a,q)=1}} \mathfrak{M}_{a,q}$. Als Supplementintervalle bezeichnen wir die Punktmenge $\mathfrak{m} = [-\omega_0, 1 - \omega_0] - \mathfrak{M}$. Ist $\alpha \in \mathfrak{m}$, so gibt es a, q mit $(a, q) = 1$, $\log^A N < q \leqq N \cdot \log^{-A} N$ und $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqq \frac{\log^A N}{q \cdot N}$.

Lemma 4. 1: *Sei $\alpha \in \mathfrak{M}$, also $\alpha = \frac{a}{q} + \beta$ mit $|\beta| \leqq \omega_0$. Dann ist für genügend großes R mit positiven Konstanten c_1, c_j' und c_{36}:*

(4, 12)
$$\sum_{p^k \leq R} e(\alpha p^k) = \frac{W_{a,q,k}}{\varphi(q)} \cdot \sum_{m=2}^{R} \frac{e(m\beta)}{m^{1-\frac{1}{k}} \cdot \log m} + O\left(R^{\frac{1}{k}} \cdot \exp\left(-c_1 \cdot \sqrt{\frac{\log R}{k}}\right)\right),$$

(4, 13)
$$F_j^*(\alpha) = G_j^*(\alpha, a, q) + O\left(P^{\varrho_j} \cdot \exp\left(-c_j' \sqrt{\log P}\right)\right),$$

(4, 14)
$$F^*(\alpha) = G^*(\alpha) + O\left(P^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_r} \cdot \exp\left(-c_{36} \cdot \sqrt{\log P}\right)\right).$$

Beweis: (4, 12) folgt aus Hua (12), Lemma 6, S. 71. (4, 13) und (4, 14) folgen aus (4, 12) wie im I. Teil Lemma 5. 2 aus 5. 1.

Lemma 4. 2: *Auf* $\mathfrak{m}$ *ist für* $A > (2k_r + 1)\, 2^{6k_r - 2}$

$$\underset{\alpha \in \mathfrak{m}}{|F_r^*(\alpha)|} \ll P^{\varrho_r} \cdot (\log P)^{-A_0} \text{ mit } A_0 = \frac{A}{4k_r + 4} \cdot 2^{-2k_r}.$$

Beweis: I. Teil, Lemma 4. 1.

Lemma 4. 3:

$$\int_{\mathfrak{m}} = \int_{\substack{-\omega_0 \\ \alpha \in \mathfrak{m}}}^{1-\omega_0} |F^*(\alpha)|^2\, d\alpha \ll P^{2(\varrho_1 + \cdots + \varrho_{r-1}) - k_r + 2\varrho_r} \cdot (\log P)^{c_{35} - 2A_0}.$$

Beweis: Wegen der Voraussetzung (4, 5) ist

$$\int_{-\omega_0}^{1-\omega_0} \left| \prod_{j=1}^{r-1} F_j^*(\alpha) \right|^2 d\alpha = L \ll P^{2(\varrho_1 + \cdots + \varrho_{r-1}) - k_r} \cdot (\log P)^{c_{34}},$$

woraus wegen Lemma 4. 2 die Behauptung folgt.

Lemma 4. 4:

$$\int_{\mathfrak{M}} = \sum_{q \leq \log^A N} \sum_{\substack{0 \leq a \leq q-1 \\ (a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}_{a,q}} |F^*(\alpha) - G^*(\alpha, a, q)|^2\, d\alpha$$

$$\ll P^{2(\varrho_1 + \cdots + \varrho_r) - k_r} \cdot (\log P)^{2A + \tau} \cdot \exp\left(-c_{36} \sqrt{\log P}\right).$$

Beweis: Nach Lemma 4. 1 ist der Integrand ein

$$O\left(P^{2(\varrho_1 + \cdots + \varrho_r)} \cdot \exp\left(-c_{36} \cdot \sqrt{\log P}\right)\right);$$

die Länge eines Intervalles $\mathfrak{M}_{a,q}$ ist $2\omega_0 = \dfrac{2(\log N)^\tau}{N} = O\left((\log P)^\tau \cdot P^{-k_r}\right)$ und die Anzahl der Summanden ist kleiner als $\log^{2A} N$, woraus die Behauptung folgt.

Lemma 4. 5: *Für* $0 < |\beta| \leqq \frac{1}{2}$ *ist*:

$$\left| \sum_{m=2}^{R} \frac{e(m\beta)}{\log m} \right| \leqq \min(2R, |\beta|^{-1}), \tag{4, 15}$$

$$H_j(\beta) \ll \min\left(P^{\varrho_j}, |\beta|^{-\frac{\varrho_j}{k_r}}\right), \qquad \textit{falls } \varrho_j = \frac{k_r}{k_j}. \tag{4, 16}$$

$$H_j(\beta) \ll \min\left(P^{\varrho_j}, P^{-\varrho_j(k_j - 1)} \cdot |\beta|^{-1}\right), \quad \textit{falls } \varrho_j' = \varrho_j. \tag{4, 17}$$

Stets ist

$$H_j(\beta) \ll P^{\varrho_j}. \tag{4, 18}$$

Beweis: (4, 18) ist trivial. (4, 15) folgt aus Teil I, Lemma 5. 4, Formel (5, 13). Sei nun $\varrho_j' = \varrho_j$, also nach (4, 8):

$$H_j(\beta) = \sum_{2^{-k_j} P^{\varrho_j k_j} \leq m \leq P^{\varrho_j k_j}} \frac{e(m\beta)}{m^{1 - \frac{1}{k_j}} \cdot \log m}.$$

Auf Grund von Abels Lemma (Teil I, Satz I, 2) und von

$$\left| \sum_{B_1 \leq m \leq B_2} e(m\beta) \right| \leqq \min\left(B_2 - B_1, \tfrac{1}{2} \| \beta \|^{-1}\right)$$

(Vinogradov (28), Chap. I, Lemma 6) ist:

$$|H_j(\beta)| \leqq \left| \sum_{m = [2^{-k_j} P^{\varrho_j k_j}]}^{P^{\varrho_j k_j}} e(m\beta) \right| \cdot P^{-\varrho_j k_j \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)}$$

$$+ \int_{2^{-k_j} P^{\varrho_j k_j}}^{P^{\varrho_j k_j}} \left| \sum_{m}^{z} e(m\beta) \right| \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^{1 - \frac{1}{k_j}} \log z} \right) dz$$

$$\ll |\beta|^{-1} \cdot P^{-\varrho_j k_j \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)},$$

also gilt (4, 17).

Um (4, 16) zu beweisen, zerteilen wir — mit der Abkürzung $M = \max(2, 2^{-k_j} \cdot P^{\varrho_j k_j})$ — die Summe

$$\sum_{M \leq m \leq P^{\varrho_j k_j}} \frac{e(m\beta)}{m^{1-\frac{1}{k_j}} \log m} \quad \text{in} \quad \sum_{M}^{|\beta|^{-1}} \quad \text{und} \quad \sum_{|\beta|^{-1}}^{P^{\varrho_j k_j}}.$$

Es ist

$$\left| \sum_{M}^{|\beta|^{-1}} \right| \leq 2 \cdot \sum_{2 \leq m \leq |\beta|^{-1}} \frac{1}{m^{1-\frac{1}{k_j}}} \ll (|\beta|^{-1})^{\frac{1}{k_j}} = |\beta|^{-\frac{\varrho_j}{k_r}},$$

nnd wie beim Beweise von (4, 17) folgt

$$\left| \sum_{|\beta|^{-1}}^{P^{\varrho_j k_j}} \right| \ll |\beta|^{+1} \cdot |\beta|^{-\left(1-\frac{1}{k_j}\right)} = |\beta|^{-\frac{1}{k_j}} = |\beta|^{-\frac{\varrho_j}{k_r}}.$$

Lemma 4. 6:

$$\int_{\mathfrak{m}} = \int_{\substack{-\omega_0 \\ \alpha \in \mathfrak{m}}}^{1-\omega_0} \left| \sum_{q=1}^{\log^A N} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} G^*(\alpha, a, q) \right|^2 d\alpha \ll P^{2(\varrho_1 + \cdots + \varrho_r) - k_r} \cdot (\log P)^{(3+\varepsilon)\cdot A - \tau}.$$

Beweis: Nach Cauchys Ungleichung ist:

$$\int_{\mathfrak{m}} \left| \sum_q \sum_a{}' G^* \right|^2 d\alpha \leq \log^{2A} N \cdot \sum_q \sum_a{}' \cdot \int_{\substack{-\omega_0 \\ \alpha \in \mathfrak{m}}}^{1-\omega_0} |G^*|^2 \, d\alpha \leq \log^{2A} N \cdot \sum_q \sum_a{}' J_{a,q}$$

mit

$$J_{a,q} = \left\{ \int_{-\omega_0}^{1-\omega_0} - \int_{\mathfrak{M}_{a,q}} \right\} |G^*(\alpha, a, q)|^2 \, d\alpha.$$

Nun ist

$$H_j(\beta) = \sum_{M \leq m \leq P^{\varrho_j k_j}} \frac{e(m\beta)}{m^{1-\frac{1}{k_j}} \cdot \log m};$$

wenn $\bar{\alpha}$ die zu α konjugiert komplexe Zahl bedeutet, so ist

$$|H_j(\beta)|^2 = H_j(\beta) \cdot \overline{H_j(\beta)} = \overline{H_j(-\beta)} \cdot H_j(-\beta) = |H_j(-\beta)|^2,$$

also

$$\int_{\omega_0}^{\frac{1}{2}} \left| \prod_j H_j(\beta) \right|^2 d\beta = -\int_{-\omega_0}^{-\frac{1}{2}} \left| \prod_j H_j(-\beta) \right|^2 d\beta = \int_{-\frac{1}{2}}^{-\omega_0} \left| \prod_j H_j(\beta) \right|^2 d\beta;$$

und es ist

$$\int_{-\omega_0}^{1-\omega_0} \left| \prod_j H_j\left(\alpha - \frac{a}{q}\right) \right|^2 d\alpha = \int_{-\omega_0}^{1-\omega_0} \left| \prod_j H_j(\alpha) \right|^2 d\alpha,$$

denn für jedes reelle γ ist

$$\int_{\gamma}^{1+\gamma} \left| \prod_j H_j(\beta) \right|^2 d\beta = \int_{-\omega_0}^{1-\omega_0} \left| \prod_j H_j(\beta) \right|^2 d\beta.$$

Somit ist

$$\int_{-\omega_0}^{1-\omega_0} |G^*|^2 d\alpha = \int_{-\omega_0}^{1-\omega_0} \frac{\left|\prod_j W_{a,q,k_j}\right|^2}{|(\varphi(q))^r|^2} \cdot \left| \prod_j H_j\left(\alpha - \frac{a}{q}\right) \right|^2 d\alpha$$

$$= \left\{ 2 \cdot \int_{\omega_0}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \right\} \left| \frac{\prod_j W_{a,q,k_j}}{(\varphi(q))^r} \right|^2 \left| \prod_j H_j(\alpha) \right|^2 d\alpha.$$

Also ist mit Lemma 4. 5 und Lemma 2. 2 (2, 7) $(W_{a,q,k} = O(q^{1+\varepsilon}))$

$$J_{a,q} \ll q^{-\frac{r}{2}+\varepsilon} \cdot \int_{\omega_0}^{\frac{1}{2}} \left| \prod_{j=1}^{r} H_j(\alpha) \right|^2 d\alpha.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) $k_r = k_j \cdot \varrho_j$ für alle $j = 1, \ldots, r$. Dann ist nach (4, 16)

$$\left| \prod_{j=1}^{r} H_j(\beta) \right|^2 \ll \left| \prod_{j=1}^{r} |\beta|^{-\frac{\varrho_j}{k_r}} \right|^2 = |\beta|^{-\left(2\sum_1^r \varrho_j\right)\cdot\frac{1}{k_r}},$$

und es wird

$$J_{a,q} \ll q^{-\frac{r}{2}+\varepsilon} \cdot \int_{\omega_0}^{\infty} |\beta|^{-\left(2\sum_1^r \varrho_j\right)\cdot\frac{1}{k_r}} d\beta \ll P^{2\cdot\sum_1^r \varrho_j - k_r} \cdot (\log P)^{-\tau\cdot\left(2\sum_1^r \varrho_j\cdot\frac{1}{k_r}-1\right)} \cdot q^{-\frac{r}{2}+\varepsilon},$$

da

$$\omega_0 = \frac{(\log N)^\tau}{N}, \quad N = [P^{k_r}]$$

ist.

b) Oder aber $\varrho'_{j_0} = \varrho_{j_0} = k_r \cdot k_{j_0}^{-1}$ für ein j_0. Dann ist mit der trivialen Abschätzung $H_j(\beta) \ll P^{\varrho_j}$ für $j \neq j_0$ wegen (4, 17):

$$\left| \prod_j H_j(\beta) \right|^2 \ll |\beta|^{-2} \cdot |P^{-\varrho_{j_0}(k_{j_0}-1)}|^2 \cdot \left| \prod_{j \neq j_0} P^{\varrho_j} \right|^2$$

und

$$J_{a,q} \ll q^{-\frac{r}{2}+\varepsilon} \cdot P^{2\cdot\sum_{j\neq j_0}\varrho_j} \cdot P^{-2k_r+2\varrho_{j_0}} \cdot \int_{\omega_0}^{\infty} |\beta|^{-2} d\beta$$
$$\ll q^{-\frac{r}{2}+\varepsilon} \cdot P^{2\cdot\sum_{j=1}^r \varrho_j - k_r} \cdot (\log P)^{-\tau}.$$

Da $\sum_1^r \varrho_j > k_r$ ist, folgt somit in beiden Fällen

$$J_{a,q} \ll q^{-\frac{r}{2}+\varepsilon} \cdot P^{2\cdot\sum_1^r \varrho_j - k_r} \cdot (\log P)^{-\tau},$$

und wegen $r \geqq 2$

$$\int_{\mathfrak{N}} \ll \log^{2A} N \cdot \sum_{q \leq \log^A N} q^{-\frac{r}{2}+\varepsilon+1} \cdot P^{2\sum_1^r \varrho_j - k_r} (\log P)^{-\tau} \ll P^{2\sum_1^r \varrho_j - k_r} \cdot (\log P)^{(3+\varepsilon)A-\tau}.$$

Lemma 4. 7:

$$(4, 18) \quad J = \int_{-\omega_0}^{1-\omega_0} \left| F^*(\alpha) - \sum_{q=1}^{\log^A N} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} G^*(\alpha, a, q) \right|^2 d\alpha \ll P^{2\cdot\sum_1^r \varrho_j - k_r} \cdot (\log P)^{-F},$$

wobei

$$(4, 19) \quad F = \min\{2A_0 - c_{35};\ \tau - (3+\varepsilon)A\} \quad mit \quad A_0 = \frac{A \cdot 2^{-2k_r}}{4 \cdot k_r + 4}$$

ist.

Beweis:

$$J = \int_{\mathfrak{m}} + \int_{\mathfrak{M}} \leqq \int_{\mathfrak{m}} |F^*|^2 d\alpha + 2 \cdot \int_{\mathfrak{m}} \left| F^* \cdot \sum_{q,a} G^* \right|^2 d\alpha + \int_{\mathfrak{m}} \left| \sum_{q,a} G^* \right|^2 d\alpha$$
$$+ \int_{\mathfrak{M}} \left| F^* - \sum_q \sum_a{}' G^* \right|^2 d\alpha = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$$
$$\ll P^{2\cdot\sum_1^r \varrho_j - k_r} \cdot \{(\log P)^{c_{33}-2A_0} + (\log P)^{\frac{c_{33}}{2} - A_0 + \frac{3+\varepsilon}{2}\cdot A - \frac{\tau}{2}} + (\log P)^{(3+\varepsilon)A-\tau}$$
$$+ (\log P)^{2A+\tau} \cdot \exp(-c_{36}\sqrt{\log P})\}$$

wegen Lemma 4. 3 (Abschätzung von J_1) bzw. Lemma 4. 3 und 4. 6 in Verbindung mit Cauchys Ungleichung (Abschätzung von J_2) bzw. Lemma 4. 6 (Abschätzung von J_3) bzw. Lemma 4. 4 (Abschätzung von J_4). Man beachte $\exp(-c_{36}\sqrt{\log P}) \ll (\log P)^{-F-2A-r}$.

Lemma 4. 8: *Es ist*

$$(4,20)\qquad \sum_{q=1}^{\log^A N} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} G^*(\alpha, a, q) = \sum_{0\le n\le\infty} \mathfrak{S}'(n)\cdot\psi(n)\cdot e(n\alpha)$$

mit

$$(3,8)\qquad \mathfrak{S}'(n) = \sum_{q=1}^{\log^A N} A(n,q) = \sum_{q=1}^{\log^A N} \varphi(q)^{-r}\cdot \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} \prod_{j=1}^{r} W_{a,q,k_j}\cdot e\left(-\frac{a}{q}\cdot n\right)$$

und

$$(4,21)\qquad \psi(n) = \sum_{\substack{u_1,\dots,u_r\\ u_1+\cdots+u_r=n\\ \max\left(2,\left(\frac{P^{\varrho_j'}}{2}\right)^{k_j}\right)\le u_j\le P^{\varrho_j k_j}}} \frac{1}{\log u_1\cdots\log u_r\cdot u_1^{1-\frac{1}{k_1}}\cdots u_r^{1-\frac{1}{k_r}}}.$$

Beweis: Wegen (4, 8) und (4, 9) ist

$$G_j^*(\alpha, a, q) = \frac{W_{a,q,k_j}}{\varphi(q)}\cdot\sum_{u_j=M}^{[P^{\varrho_j k_j}]} \frac{e(u_j\beta)}{u_j^{1-\frac{1}{k_j}}\cdot\log u_j},$$

also

$$G^*(\alpha, a, q) = \frac{\prod_j W_{a,q,k_j}}{\varphi(q)^r}\cdot\sum_{u_1,\dots,u_r} \frac{e\left((u_1+\cdots+u_r)\left(\alpha-\frac{a}{q}\right)\right)}{\prod_j u_j^{1-\frac{1}{k_j}}\cdot\log u_j}$$

$$= \frac{\prod_j W_{a,q,k_j}}{\varphi(q)^r}\cdot\sum_{0\le n\le\infty}\ \sum_{\substack{u_1,\dots,u_r\\ u_1+\cdots+u_r=n}} e\left(-\frac{a}{q}\cdot n\right)\cdot\frac{e(n\alpha)}{\prod_j (u_j^{1-\frac{1}{k_j}}\cdot\log u_j)}.$$

Hieraus folgt mit (3, 8) die Behauptung.

Lemma 4. 9:

$$\sum_{0\le n\le\infty} (r(n)-\mathfrak{S}'(n)\,\psi(n))^2 = O\left(P^{2\cdot\sum_1^r \varrho_j - k_r}\cdot(\log P)^{-F}\right).$$

Folgerung: Für reelle Zahlen U_0 und U_1 mit $0 \leqq U_0 < U_1 < \infty$ gilt erst recht

$$(4,22)\qquad \sum_{U_0\le n\le U_1} (r(n)-\mathfrak{S}'(n)\cdot\psi(n))^2 = O\left(P^{2\cdot\sum_1^r \varrho_j - k_r}\cdot(\log P)^{-F}\right).$$

Beweis: Es ist nach (4, 7) $F^*(\alpha) = \sum_{0\le n\le\infty} r(n)\cdot e(n\alpha)$, wobei $r(n)$ die Lösungsanzahl von $p_1^{k_1}+\cdots+p_r^{k_r} = n$ unter den Nebenbedingungen (4, 2) bezeichnet. Bekanntlich ist für reelle γ_n:

$$\int_{-\omega_0}^{1-\omega_0} \left|\sum_{1\le n\le K}\gamma_n e(n\alpha)\right|^2 d\alpha = \sum_{1\le n\le K}\gamma_n^2.$$

Der Ausdruck $r(n)-\mathfrak{S}'(n)\cdot\psi(n)$ ist reell, weil

$$\sum_{a \bmod q}{}' \prod_{j=1}^{r} W_{a,q,k_j}\cdot e\left(-\frac{a}{q}n\right) = \overline{\sum_{a \bmod q}{}' \prod_{j=1}^{r} W_{a,q,k_j}\, e\left(-\frac{a}{q}n\right)}$$

ist. Also folgt mit Lemma 4. 8:

$$\sum_{0 \leq n \leq \infty} (r(n) - \mathfrak{S}'(n) \cdot \psi(n))^2 = \int_{-\omega_0}^{1-\omega_0} \left| F^*(\alpha) - \sum_q \sum_a{}' G^*(\alpha, a, q) \right|^2 d\alpha,$$

und Lemma 4. 7 gibt die Behauptung.

Nun wollen wir die erhaltenen Ergebnisse auf die fünf auf S. 83 genannten Exponentenschemata (2, 12) anwenden.

Wir geben für diese fünf Fälle die Werte, die uns interessieren, in Form einer Tabelle an:

Fall		k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ_4	ϱ_5	ϱ_1'	ϱ_2'	ϱ_3'	ϱ_4'	ϱ_5'
2, 12a	1)	1	k	—	—	—	k	1	—	—	—	0	0	—	—	—
b	2)	2	2	k	—	—	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{2}$	1	—	—	0	0	0	—	—
c	3)	3	3	3	3	k	$\frac{k}{3}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{4}{15}k$	$\frac{4}{15}k$	1	$\frac{k}{3}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{4}{15}k$	$\frac{4}{15}k$	1
d	4)	2	4	4	k	—	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{4}$	$\frac{k}{4}$	1	—	0	0	0	0	—
e	5)	2	3	6	k	—	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{k}{6}$	1	—	0	0	0	0	—

	P	U_0	U_1	$\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_r} - 1$	$2(\varrho_1 + \cdots + \varrho_r) - k_r$
1)	$N^{\frac{1}{k}}$	4	P^k	$\frac{1}{k}$	$k+2$
2)	$N^{\frac{1}{k}}$	6	P^k	$\frac{1}{k}$	$k+2$
3)	$N^{\frac{1}{k}}$	$\frac{2}{3}P^k$	P^k	$\frac{1}{3} + \frac{1}{k}$	$\frac{7}{5}k+2$
4)	$N^{\frac{1}{k}}$	8	P^k	$\frac{1}{k}$	$k+2$
5)	$N^{\frac{1}{k}}$	8	P^k	$\frac{1}{k}$	$k+2$

Die Voraussetzungen (4, 3) und (4, 4) sind für diese Werte erfüllt, ebenso (4, 5) wegen Lemma 1. 2 und 1. 3 sowie wegen Hua (12), Lemma 3 für den 2. Fall.

Lemma 4. 10: *Es gibt positive Konstanten c_{37} und c_{38} bzw. c_{37}' und c_{38}', so daß in den Fällen* 1), 2), 4), 5) *für $U_0 \leqq n \leqq U_1$ gilt:*

$$c_{37} \cdot \frac{n^{\left(\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_r}\right) - 1}}{(\log n)^r} < \psi(n) < c_{38} \cdot \frac{n^{\left(\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_r}\right) - 1} \cdot (\log\log n)^{2r-1}}{(\log n)^r},$$

und im Falle 3):

$$c_{37}' \cdot n^{\frac{1}{5} + \frac{1}{k}} \cdot (\log n)^{-5} < \psi(n) < c_{38}' \cdot n^{\frac{1}{5} + \frac{1}{k}} \cdot (\log n)^{-5}.$$

$\psi(n)$ ist dabei durch (4, 21) *gegeben.*

Beweis: Die Behauptung ist für den Fall 3) einfach einzusehen, wegen der Beschränkung der u_j nach unten. Für die Fälle 1), 2), 4) und 5) wird

$$\psi(n) = \sum_{\substack{u_1,\ldots,u_r \\ u_1+\cdots+u_r=n \\ 2\leq u_j\leq n}} \cdot \frac{1}{\log u_1 \cdots \log u_r \cdot u_1^{1-\frac{1}{k_1}} \cdots u_r^{1-\frac{1}{k_r}}};$$

so daß — da die Lösungsanzahl von $u_1 + \cdots + u_r = n$ mit $2 \leqq u_j \leqq n$ nach Teil I, Satz II, 4 gleich $c' n^{r-1} + O(n^{r-2})$ ist — die linke Seite der Ungleichung trivial ist. Die rechte Seite ist für $n \leqq 25$ durch passende Wahl von c_{38} zu erfüllen, für $n > 25$ folgt sie so: Wir beschränken u_j auf

$$(4, 23) \qquad n \cdot (\log\log n)^{-(\sigma_j+1)} < u_j \leqq n \cdot (\log\log n)^{-\sigma_j}$$

und summieren dann über alle Möglichkeiten für

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r) \text{ mit } 0 \leqq \sigma_j < \log n \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

Die Lösungsanzahl $L_{(4,23)}$ von $u_1 + \cdots + u_r = n$ unter den Einschränkungen (4, 23) ist

$$L_{(4,23)} \ll \frac{n^{r-1} (\log\log n)^{\min \sigma_j}}{(\log\log n)^{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_r}}.$$

Unter den Einschränkungen (4, 23) für die u_j ist also

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{u_j \text{ mit } (4,23) \\ u_1+\cdots+u_r=n \\ u_j\geqq 2}} \frac{1}{\log u_1 \cdots \log u_r \cdot u_1^{1-\frac{1}{k_1}} \cdots u_r^{1-\frac{1}{k_r}}} \\
&\leqq L_{(4,23)} \cdot \frac{(\log\log n)^{\sigma_1+\cdots+\sigma_r+r} \cdot n^{\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_r}} \cdot D(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)}{n^r \cdot (\log\log n)^{\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_r}} \cdot (\log\log n)^{\frac{\sigma_1}{k_1}+\cdots+\frac{\sigma_r}{k_r}}} \\
&\leqq c \cdot D(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \cdot \frac{(\log\log n)^{r+\min\sigma_j} \cdot n^{\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_r}-1}}{(\log\log n)^{\frac{\sigma_1}{k_1}+\cdots+\frac{\sigma_r}{k_r}}} \\
&= E(n, \sigma_1, \ldots, \sigma_r),
\end{aligned}$$

wobei wir für $D(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ setzen: $D = (\log 2)^{-r}$, wenn ein $\sigma_{j_0} > \log\log n$ ist, und

$$D = \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{(\log n - (\sigma_j + 1) \log\log\log n)} \leqq c \cdot (\log n)^{-r},$$

wenn alle $\sigma_j \leqq \log\log n$ sind ($j = 1, \ldots, r$).

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned}
\psi(n) &= \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r=0}^{\log n} E(n, \sigma_1, \ldots, \sigma_r) \\
&= \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r=0}^{\log\log n} E(n, \sigma_1, \ldots, \sigma_r) + O\left(\left\{\sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_r=0 \\ \sigma_1>\log\log n}}^{\log n} + \cdots + \sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_r=0 \\ \sigma_r>\log\log n}}^{\log n}\right\} E(n, \sigma_1, \ldots, \sigma_r)\right).
\end{aligned}$$

Wegen $\varrho_j \cdot k_j = k_r$ für alle $j = 1, \ldots, r$ und $\varrho_1 + \cdots + \varrho_{r-1} \geqq k_r$ (vgl. (4, 3)) ist

$$\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{r-1}} \geqq 1,$$

also

$$\frac{(\log\log n)^{\min \sigma_j}}{(\log\log n)^{\frac{\sigma_1}{k_1}+\cdots+\frac{\sigma_{r-1}}{k_{r-1}}}} \leqq 1.$$

Weiter ist $\sum\limits_{\sigma_r=0}^{\infty} (\log\log n)^{-\frac{\sigma_r}{k_r}}$ konvergent für $n > 25 > e^e$. Also ist

$$\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r=0}^{\log\log n} E(n, \sigma_1, \ldots, \sigma_r) \leqq c \cdot (\log\log n)^{r-1} \cdot \frac{(\log\log n)^r \cdot n^{\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_r}-1}}{(\log n)^r}.$$

Nun müssen wir noch die O-Glieder abschätzen.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) $$\min_{j=1,\ldots,r} \sigma_j \leqq \frac{1}{2k_{j_0}} \log\log n$$

und

2) $$\min_{j=1,\ldots,r} \sigma_j > \frac{1}{2k_{j_0}} \log\log n.$$

Im ersten Falle ist, da für $n > 25$

$$\sum_{\sigma_j=0}^{\log n} (\log\log n)^{-\frac{\sigma_j}{k_j}} = O(1)$$

und

$$\sum_{\sigma_{j_0} > \log\log n} (\log\log n)^{-\frac{\sigma_{j_0}}{k_{j_0}}} \leqq c \cdot (\log\log n)^{-\frac{1}{k_{j_0}} \cdot \log\log n} \leqq c \cdot (\log n)^{-\frac{1}{k_{j_0}} \log\log\log n}$$

gilt:

$$\sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_r=0 \\ \sigma_{j_0} > \log\log n \\ \min \sigma_j \leqq \frac{1}{2k_{j_0}} \log\log n}}^{\log n} E(n, \sigma_1, \ldots, \sigma_r)$$

$$\ll (\log\log n)^r \cdot (\log\log n)^{\frac{1}{2k_{j_0}} \log\log n} \cdot n^{\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_r}-1} \cdot (\log 2)^{-r} \cdot \sum_{\sigma_{j_0} > \log\log n} (\log\log n)^{-\frac{\sigma_{j_0}}{k_{j_0}}}$$

$$\ll n^{\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_r}-1} \cdot (\log n)^{-\frac{\log\log\log n}{2k_{j_0}}} \cdot (\log\log n)^r \ll n^{\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_r}-1} \cdot (\log n)^{-r}.$$

Im zweiten Falle ist, da dann alle $\sigma_j > \frac{1}{2k_{j_0}} \log\log n$ sind und wie oben

$$\frac{(\log\log n)^{\min \sigma_j}}{(\log\log n)^{\frac{\sigma_1}{k_1}+\cdots+\frac{\sigma_{r-1}}{k_{r-1}}}} \leqq 1$$

ist:

$$\sum_{\log n \geqq \sigma_j > \frac{1}{2k_{j_0}} \log\log n} E(n, \sigma_1, \ldots, \sigma_r)$$

$$\ll (\log\log n)^r \cdot n^{\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_r}-1} (\log 2)^{-r} \cdot (\log n)^{r-1} \cdot \sum_{\sigma_r > \frac{1}{2k_{j_0}} \cdot \log\log n} (\log\log n)^{-\frac{\sigma_r}{k_r}}$$

$$\ll n^{\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_r}-1} \cdot (\log n)^{-r}.$$

Lemma 4.11: *Im Falle $t = 3$) (vgl. (2, 12c)) ist*

$$\sum_{U_0 \leq n \leq U_1} (r(n) - \mathfrak{S}_3(n, \infty) \cdot \psi_3(n))^2 = O\left(P^{\frac{7}{5}k+2} \cdot \left\{(\log P)^{-F} + (\log P)^{-\frac{2}{3}A}\right\}\right).$$

Im Falle $t = 1), 2), 4), 5)$ (vgl. (2, 12a), b), d), e)) ist

$$\sum_{U_0 \leq n \leq U_1} (r(n) - \mathfrak{S}_t(n, Q) \cdot \psi_t(n))^2 = O(P^{k+2} \cdot \{(\log P)^{-F} + (\log P)^{-(w+1)+w\eta+\varepsilon}\}).$$

F ist durch (4, 19), Q durch (3, 6) gegeben, $\psi_t(n)$ durch (4, 21). Der bei ψ (bzw. $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{S}'$) angefügte Index t soll angeben, in welchem der Fälle 1), 2), 3), 4), 5) wir uns befinden, d. h. welche Werte für $k_1, \ldots, k_r$ nach (2, 12) in der Def. (4, 21) von $\psi(n)$ einzusetzen sind. $\mathfrak{S}_t(n, Q)$ ist durch (2, 13) bis (2, 17) gegeben. $\mathfrak{S}'_t(n)$ ist durch (3, 8) in Lemma 4.8 definiert.

Beweis: Für reelle Zahlen z_1, z_2, z_3 gilt die Ungleichung

$$(z_1 - z_3)^2 \leq 2 \cdot ((z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2).$$

Also ist

$$\sum (r(n) - \mathfrak{S}_t(n, Q) \cdot \psi_t(n))^2$$
$$\leq 2 \cdot \left\{\sum (r(n) - \mathfrak{S}'(n)\, \psi_t(n))^2 + \sum (\mathfrak{S}'(n)\, \psi_t(n) - \mathfrak{S}(n, Q) \cdot \psi_t(n))^2\right\} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Σ_1 wird nach Lemma 4.8 bzw. 4.9 abgeschätzt, und Σ_2 wird durch Satz 1 (bzw. Lemma 3.5) in Verbindung mit der durch Lemma 4.10 gegebenen oberen Schranke für $\psi_t(n)$ abgeschätzt, woraus dann unmittelbar die Behauptung folgt.

Korollar: Wenn die Zahl $B > 0$ beliebig vorgegeben ist, so kann man w und A so groß gewählt vorgeben, daß $F \geqq B$, $\frac{2A}{3} > B$ und $w + 1 - w\eta - \varepsilon > B$ wird, so daß in den Fällen 1), 2), 4), 5) gilt:

$$\sum_{U_0 \leq n \leq U_1} (r(n) - \mathfrak{S}_t(n, Q) \cdot \psi_t(n))^2 = O(P^{k+2} \cdot (\log P)^{-B})$$

bzw. im Falle 3):

$$\sum_{U_0 \leq n \leq U_1} (r(n) - \mathfrak{S}_3(n, \infty) \cdot \psi_3(n))^2 = O\left(P^{\frac{7}{5}k+2} \cdot (\log P)^{-B}\right).$$

Aus Lemma 4.11 folgt auf bekannte Weise (z. B. Prachar (18), Lemma 7.4, S. 202) in den Fällen $t = 1, 2, 4, 5$

Lemma 4.12: *Die Anzahl $R(N)$ der Zahlen n mit $2 \leqq n \leqq P^k$, für die mit positiven Konstanten c_{39} bis c_{42}*

$$c_{39} \cdot (\log\log P)^{-c_{40}} < \mathfrak{S}_t(n, Q) < c_{41} \cdot (\log\log P)^{c_{40}} \quad (t = 1, 2, 4, 5, \text{ vgl. (2, 13) bis (2, 17)})$$

gilt und die auf weniger als $\frac{1}{2}\, \mathfrak{S}_t(n, Q) \cdot \psi_t(n)$ oder auf mehr als $\frac{3}{2}\, \mathfrak{S}_t(n, Q) \cdot \psi_t(n)$ Arten in der Form $n = p_1^{k_1} + \cdots + p_r^{k_r}$ ($k_1, \ldots, k_r$ durch (2, 12) gegeben) dargestellt werden können, ist

$$R(N) = O\left(N \cdot (\log N)^{(-B+10+\varepsilon) \cdot \frac{k}{k+2}}\right).$$

$\mathfrak{S}_t(n, Q)$ ist durch (2, 13) bis (2, 17), Q durch (3, 4) und (3, 6) gegeben.

Beweis: Wegen Lemma 4.10 und Lemma 4.11, Korollar, ist:

$$\frac{1}{4} \cdot c_{39}^2 \cdot c_{37}^2 \cdot \sum_{n=2}^{R(N)} \frac{n^{\frac{2}{k}}}{\log^{10} n} (\log\log P)^{-2c_{40}} \leqq \sum_{\substack{n=2 \\ r(n) < \frac{1}{2}\mathfrak{S}\psi \text{ oder } r(n) > \frac{3}{2}\mathfrak{S}\psi}}^{P^k} (r(n) - \mathfrak{S}(n, Q) \cdot \psi(n))^2$$
$$\ll P^{k+2} \cdot (\log P)^{-B},$$

also

$$R(N)^{\frac{k+2}{k}} \ll P^{k+2} \cdot (\log P)^{-B} \cdot (\log P)^{10} \cdot (\log\log P)^{2c_{10}}.$$

Lemma 4. 13: *Für die Anzahl $R(N)$ der nicht in der Form*

$$n = p_1^3 + \cdots + p_4^3 + p_5^k$$

darstellbaren Zahlen $1 \leqq n \leqq N$, für die $\mathfrak{S}_3(n, \infty) \geqq c_{28} > 0$ gilt, haben wir

$$R(N) \ll N \cdot (\log N)^{1 + \frac{5k}{7k+10}(-B+10+\varepsilon)}.$$

Beweis: Wie in Lemma 4. 12 erhalten wir, daß für die Anzahl $R_y(N)$ der nicht-darstellbaren Zahlen n mit

$$\mathfrak{S}_3(n, \infty) \geqq c_{28} > 0 \text{ und } \left(\frac{2}{3}\right)^y \cdot N \leqq n \leqq N \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{y-1} \qquad (y = 1, 2, \ldots)$$

gilt:

$$R_y(N) = O\left(N \cdot (\log N)^{(-B+10+\varepsilon) \cdot \frac{5k}{7k+10}}\right).$$

Da $\left(\frac{3}{2}\right)^y > N$ für $y > 5 \cdot \log N$ gilt, so ist

$$R(N) \leqq \sum_{y=1}^{5 \log N} R_y(N) = O\left(N \cdot (\log N)^{1 + \frac{5k}{7k+10} \cdot (-B+10+\varepsilon)}\right) = O\left(N \cdot (\log N)^{-B'}\right)$$

mit festem B', das bei passender Wahl von A und w (vgl. (3, 3)) beliebig groß ausfällt.

5. Ergebnisse.

Aus Lemma 4. 12 und 4. 13 in Verbindung mit den Lemmata 2. 6, 2. 7, 2. 12, 2. 17 und 2. 18, die die zu Lemma 4. 12 und 4. 13 nötigen Voraussetzungen über die singulären Produkte liefern, erhalten wir nun folgende Ergebnisse:

Satz 2: *Sei $\mathfrak{N}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen von der Art, daß zu $\mathfrak{N}$ genau die natürlichen Zahlen gehören, die folgende Bedingungen erfüllen:*

(5, 1) $3 \leqq n \leqq N$,

(5, 2) $n \equiv 0 \bmod 2$,

(5, 3) $n \not\equiv 1 \bmod p$ *für jedes* $p > 2$ *mit* $(p-1) \mid k$.

Dann gilt für die Anzahl $R(N)$ der nicht in der Form

$$n = p_1 + p_2^k$$

darstellbaren Zahlen $n \in \mathfrak{N}$ für jedes feste $B > 0$:

$$R(N) \leqq C(B) \cdot N \cdot (\log N)^{-B}.$$

Dieser Satz ist mit $B = \frac{k}{k+2}$ von Hua (12) angegeben, mit beliebigem B (und in allgemeinerer Form) von v. d. Corput (2) bewiesen.

Mit Satz II, 1 aus Teil I und Lemma II, 5. 1 aus Teil I an Stelle von Lemma 4. 1 beweist man leicht folgenden weitergehenden Satz:

Satz 2a: *Es sei $f(x) = a_0 x^k + \cdots + a_k$ ein Polynom vom Grade $k \geqq 1$ mit ganzrationalen Koeffizienten a_j. Sei $a_0 > 0$ und $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) = 1$. $\mathfrak{N}$ sei eine Teilmenge*

der natürlichen Zahlen von der Art, daß zu $\mathfrak{N}$ genau die natürlichen Zahlen n gehören, die folgende Bedingungen erfüllen:

(5, 1′) $3 \leqq n \leqq N$ *(N genügend groß).*

(5, 2′) $1 + f(1) \equiv n \bmod 2$.

(5, 3′) *Für alle Primzahlen p mit $2 < p \leqq k + 1$ ist wenigstens eine der folgenden Kongruenzen nicht erfüllt:*

$$\begin{array}{ll} a_0 + a_{p-1} + a_{2(p-1)} + \cdots & \equiv 0 \bmod p \\ a_1 + a_{1+(p-1)} + a_{1+2(p-1)} + \cdots & \equiv 0 \bmod p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{k-(p-1)} + a_k & \equiv n \bmod p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{p-2} + a_{p-2+p-1} + a_{p-2+2(p-1)} + \cdots & \equiv 0 \bmod p. \end{array}$$

Dann gibt es zwei positive, von N unabhängige Konstanten $c_{43}(B)$ und $c_{44}(B)$, so daß die Anzahl $R(N)$ der natürlichen Zahlen $n \in \mathfrak{N}$, die nicht auf wenigstens $c_{43} \cdot n^{\frac{1}{k}} \cdot (\log n)^{-2} \cdot (\log\log N)^{-k}$ Arten und die nicht auf mehr als $c_{44} \cdot n^{\frac{1}{k}} \cdot (\log n)^{-2} (\log\log N)^2$ Arten in der Gestalt $n = p_1 + f(p_2)$ darstellbar sind, für jedes feste $B > 0$ der Ungleichung

$$R(N) \leqq C(B) \cdot \frac{N}{\log^B N}$$

genügt.

Satz 3: *Sei $\mathfrak{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen n mit:*

(5, 4) $3 \leqq n \leqq N$;

(5, 5) $n \not\equiv 0 \bmod 2$, $n \not\equiv 2 \bmod 3$ *für ungerades k;*

(5, 5a) $\left.\begin{array}{l} n \equiv 3 \bmod 24 \\ n \not\equiv 0 \bmod 5 \text{ für } 4 \nmid k \\ n \not\equiv 0, 2 \bmod 5 \text{ für } 4 \mid k \end{array}\right\}$ *für gerades k;*

(5, 6) $n \not\equiv 1 \bmod p$ *für jedes $p \equiv 3 \bmod 4$ mit $(p - 1) \mid k$.*

Dann gilt für die Anzahl $R(N)$ der nicht in der Form

$$n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^k$$

darstellbaren Zahlen $n \in \mathfrak{N}$ für jedes feste $B > 0$:

$$R(N) \leqq C(B) \cdot \frac{N}{\log^B N}$$

$\left(\text{vgl. Hua (12), Theorem 1, S. 68, wo Satz 3 mit } B = \frac{k}{k+2} \text{ bewiesen ist}\right)$.

Satz 4: *Sei $\mathfrak{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen n mit:*

(5, 7) $3 \leqq n \leqq N$,

(5, 8) $n \equiv 1 \bmod 2$,

(5, 9) $\left.\begin{array}{l} n \not\equiv 0, 2, -2 \bmod 9 \\ n \not\equiv 0 \bmod 7 \end{array}\right\}$ *falls $3 \mid k$, $2 \nmid k$,*

(5, 9a) $\left.\begin{array}{l} n \not\equiv 0, 2, -2, 4 \bmod 9 \\ n \not\equiv 0, 2 \bmod 7 \end{array}\right\}$ *falls $6 \mid k$.*

Dann gilt für die Anzahl $R(N)$ der nicht in der Form

$$n = p_1^3 + \cdots + p_4^3 + p_5^k$$

darstellbaren Zahlen $n \in \mathfrak{N}$ für jedes feste $B > 0$:

$$R(N) \leqq C(B) \frac{N}{\log^B N}.$$

Satz 5: *Sei $\mathfrak{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen n mit:*

(5, 10) $\quad 3 \leqq n \leqq N,$

(5, 11) $\quad n \equiv 0 \mod 2,$

(5, 12) $\quad n \not\equiv 0 \mod 3,$ *falls k ungerade.*

(5, 12a) $\quad \left.\begin{array}{ll} n \equiv 4 & \mod 8 \\ n \equiv 1 & \mod 3 \\ n \not\equiv 1, 3 & \mod 5 \\ n \not\equiv 0 & \mod 5, \text{ falls } 4 \mid k \end{array}\right\}$ *falls k gerade.*

Dann gilt für die Anzahl $R(N)$ der nicht in der Form

$$n = p_1^2 + p_2^4 + p_3^4 + p_4^k$$

darstellbaren Zahlen $n \in \mathfrak{N}$ für jedes feste $B > 0$:

$$R(N) \leqq C(B) \cdot \frac{N}{\log^B N}.$$

Satz 6: *Sei $\mathfrak{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen n mit:*

(5, 13) $\quad 3 \leqq n \leqq N,$

(5, 14) $\quad n \equiv 0 \mod 2,$

(5, 15) $\quad n \not\equiv -1 \mod 7,$ *wenn $3 \mid k$ und $2 \nmid k$.*

(5, 15a) $\quad \left.\begin{array}{l} n \not\equiv 0 \mod 3 \\ n \not\equiv +1, -1 \mod 7, \text{ wenn } 3 \mid k \end{array}\right\}$ *falls k gerade.*

Dann gilt für die Anzahl $R(N)$ der nicht in der Form

$$n = p_1^2 + p_2^3 + p_3^6 + p_4^k$$

darstellbaren Zahlen $n \in \mathfrak{N}$ für jedes feste $B > 0$:

$$R(N) \leqq C(B) \cdot \frac{N}{\log^B N}.$$

6. Folgerungen.

Aus den Ergebnissen des letzten Paragraphen lassen sich Folgerungen ziehen, die wir nicht alle näher verfolgen wollen. Aus den folgenden Beispielen wird die zu befolgende Methode, um ein „fast-alle"-Ergebnis in ein „alle"-Ergebnis zu verwandeln, klar werden.

Lemma 6. 1: *Sei*

(6, 1) $$x \equiv a_i \mod p^{(i)}; \quad \pi =_{\mathrm{Df.}} \prod_{i=1}^{m} p^{(i)}$$

($i = 1, \ldots, m$; alle Primzahlen $p^{(i)}$ verschieden). y_i sei definiert durch $\frac{\pi}{p^{(i)}} \cdot y_i \equiv 1 \mod p^{(i)}$. Dann ist die mod π *eindeutige Lösung x der Kongruenzen* (6, 1) *gegeben durch* $x \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i y_i \cdot \frac{\pi}{p^{(i)}} \mod \pi$. (*Le Veque*, Topics in Number Theory, 1956, I, Chap. 3—4, S. 36.)

Es ist zudem $(x, \pi) = 1$, wenn $(a_i, p^{(i)}) = 1$ für $i = 1, \ldots, m$ ist. Denn aus $p^{(i)} \mid x$ würde folgen:

$$p^{(i)} \mid a_i y_i \cdot \frac{\pi}{p^{(i)}} \to p^{(i)} \mid \frac{\pi}{p^{(i)}} \cdot y_i.$$

Dies steht aber im Widerspruch zu $\frac{\pi}{p^{(i)}} \cdot y_i \equiv 1 \mod p^{(i)}$.

Aus Satz 2 folgt nun das bekannte Ergebnis:

Satz 7: *Jede hinreichend große ungerade Zahl N ist in der Gestalt $N = p_1 + p_2 + p_3^k$ darstellbar.*

Beweis: Nach Satz 2 gilt für die Anzahl $R(N)$ der nicht in der Form $n = p_2 + p_3^k$ darstellbaren Zahlen n mit (5, 1), (5, 2) und (5, 3): $R(N) \leqq C(B) \frac{N}{\log^B N}$ für jedes feste $B > 0$. Um Satz 7 zu beweisen, genügt es nachzuweisen, daß es mehr als $C(B) \cdot \frac{N}{\log^B N}$ Zahlen der Form $N - p_1$ (N ungerade) gibt, die (5, 1) bis (5, 3) erfüllen.

Für jedes $p^{(i)} > 2$ mit $(p^{(i)} - 1) \mid k$ gibt es ein $a(p^{(i)})$ mit $a(p^{(i)}) \not\equiv N \mod p^{(i)}$ und $a(p^{(i)}) \not\equiv 1 \mod p^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, J)$. Sei

$$\pi = \prod_{i=1}^{J} p^{(i)}.$$

Die Kongruenzen $x \equiv N - a(p^{(i)}) \mod p^{(i)}$ sind gleichzeitig lösbar durch ein $x \mod \pi$ mit $(x, \pi) = 1$ nach Lemma 6. 1. Auf Grund des Primzahlsatzes gibt es unterhalb $N - 3$ mehr als $c_{46} \cdot \frac{N}{\log N}$ Primzahlen $p_1 > 2$ $(c_{46} > 0)$ mit $p_1 \equiv x \mod \pi$. Für alle diese Primzahlen ist $N - p_1 \equiv 0 \mod 2$, $3 \leqq N - p_1 \leqq N$ und $N - p_1 \equiv N - x \equiv a(p^{(i)}) \not\equiv 1 \mod p^{(i)}$ für jedes $p^{(i)} > 2$ mit $(p^{(i)} - 1) \mid k$, also sind (5, 1) bis (5, 3) erfüllt und Satz 7 ist bewiesen.

Ganz analog folgt:

Satz 7a: *Sei t ganz, fest gewählt, ebenso $G \geqq 0$. Sei k ungerade, und*

$$N_1 \geqq N_2 \geqq \cdots \geqq N_t \geqq \frac{N_1}{\log^G N_1}$$

seien hinreichend große, ungerade Zahlen. Dann kann man gleichzeitig mit derselben Primzahl p_1 die Zahlen $N_1, \ldots, N_t$ in der Form

$$\begin{aligned} N_1 &= p_1 + p_2 + p_3^k \\ N_2 &= p_1 + p_4 + p_5^k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_t &= p_1 + p_{2t} + p_{2t+1}^k \end{aligned}$$

darstellen.

Beweis: Durchläuft $p_1 > 2$ die Primzahlen unterhalb $N_t - 3$, so gelten für $n = N - p_1$ die Bedingungen (5, 1) und (5, 2). (5, 3) fällt weg, da $k \equiv 1 \mod 2$ ist. Es gibt somit nach Satz 2 höchstens $C(B) \cdot \frac{N_1}{\log^B N_1}$ Zahlen $n = N_1 - p_1$, die nicht in der Form $n = p_2 + p_3^k$ geschrieben werden können. Da es mehr als $c_{47} \cdot \frac{N_t}{\log N_t} \geqq c_{48} \cdot N_1 (\log N_1)^{-(G+1)}$ Primzahlen p_1 mit $2 < p_1 < N_t - 3$ gibt und $B > G + 1$ gemacht werden kann, gibt es mehr als $\frac{c_{48}}{2} \cdot N_1 \cdot (\log N_1)^{-(G+1)}$ Primzahlen p_1, so daß $N_1 - p_1 = p_2 + p_3^k$ ist. Auf dieselbe Weise folgt, wenn wir p_1 die soeben konstruierte Primzahlmenge durchlaufen lassen, daß es mehr als $\frac{c_{48}}{4} \cdot N_1 (\log N_1)^{-(G+1)}$ Primzahlen p_1 gibt, für die $N_1 - p_1 = p_2 + p_3^k$

und gleichzeitig $N_2 - p_1 = p_4 + p_5^k$ gilt. Die Fortsetzung des Verfahrens liefert die Behauptung.

Die folgenden Sätze 7b und 7c geben uns einen etwas anders gearteten Beweis des Theorems 2 von Hua (12), S. 68.

Satz 7b: *Sei k ungerade, N gerade und hinreichend groß. Dann ist N in der Form $N = p_1^2 + p_2^2 + p_3 + p_4^k$ darstellbar.*

Beweis: Für $2 < p_1, p_2 < \frac{\sqrt{N}}{2}$ und $n = N - p_1^2 - p_2^2$ ist $n \equiv 0 \bmod 2$ und $3 \leqq n \leqq N$. Somit ist Satz 2 anwendbar. Um die Behauptung zu beweisen, genügt der Nachweis, daß unter den Zahlen $N - p_1^2 - p_2^2$, $2 < p_1, p_2 < \frac{\sqrt{N}}{2}$ wenigstens $c_{49} \cdot \frac{N}{\log^T N}$ verschiedene sind (mit festem T). Hierzu folgen wir Roth (22), S. 278/279: Wenn $r(n)$ die Lösungsanzahl der diophantischen Gleichung $n = x^2 + y^2$ bezeichnet, so ist nach Hua (12), Lemma 3:

$$\sum_{n=1}^{N} r^2(n) = O(N \cdot \log N).$$

Sei $D_1(N) =_{\text{Df.}} \sum_{\substack{3 < n < N-3 \\ \varrho_1(n) > 0}} 1$, wobei $\varrho_1(n)$ die Darstellungsanzahl von n in der Form $n = p_1^2 + p_2^2$ mit $2 < p_1, p_2 < \frac{\sqrt{N}}{2}$ bezeichnet. Dann ist:

$$\Big(\sum_{3 < n < N-3} \varrho_1(n)\Big)^2 \leqq \sum_{3 < n < N-3} \varrho_1^2(n) \cdot \sum_{\substack{3 < n < N-3 \\ \varrho_1(n) > 0}} 1.$$

Da nach Hua (12), Lemma 3

$$\sum_{3 < n < N-3} \varrho_1^2(n) \ll N \cdot \log N$$

und ferner

$$\sum_{3 < n < N-3} \varrho_1(n) \geqq \left(\pi\left(\frac{\sqrt{N}}{2}\right) - 2\right)^2 > c \cdot \frac{N}{\log^2 N}$$

ist, so wird

$$D_1(N) \geqq c \cdot N^2 \cdot ((\log N)^4 \cdot N \log N)^{-1} = c \cdot \frac{N}{\log^5 N},$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz 7c: *Sei k gerade, N ungerade und hinreichend groß. Sei weiter $N \not\equiv 0 \bmod 3$. Dann ist N darstellbar in der Form*

$$N = p_1^2 + p_2^2 + p_3 + p_4^k.$$

Beweis: Der Beweis verläuft analog dem Beweis von Satz 7b; wir müssen nur noch zusätzlich erreichen, daß für jedes $p^{(i)} > 2$ mit $(p^{(i)} - 1) \mid k$ $(i = 1, \ldots, J)$ gilt:

$$(N - p_1^2 - p_2^2) \not\equiv 1 \bmod p^{(i)}.$$

Dazu beschränken wir einfach die Primzahlen p_1 und p_2 in geeigneter Weise.

Da k gerade ist, ist $(3 - 1) \mid k$. Wegen $N \not\equiv 0 \bmod 3$ und $p^2 \equiv 1 \bmod 3$ für $3 \nmid p$ ist $N - p_1^2 - p_2^2 \not\equiv 1 \bmod 3$.

Sei nun $p^{(i)} > 3$ und

$$\pi = \prod_{p^{(i)} > 3,\, (p^{(i)} - 1) \mid k} p^{(i)} = \prod_{i=1}^{J} p^{(i)}.$$

Wir verlangen, daß $p_2 \equiv 1 \bmod \pi$ sei. Weiter gibt es für $i = 1, \ldots, J$ ein $a(p^{(i)}) \not\equiv 0 \bmod p^{(i)}$, so daß $(N-1) - p_1^2 \not\equiv 1 \bmod p^{(i)}$ für alle Primzahlen p_1 mit $p_1 \equiv a(p^{(i)}) \bmod p^{(i)}$ wird. Wegen Lemma 6.1 und dem Primzahlsatz für arithmetische Progressionen gibt es unterhalb $\frac{\sqrt{N}}{2}$ mehr als $c_{50} \cdot \sqrt{N} \cdot (\log N)^{-1}$ Primzahlen p_1 mit $p_1 \equiv a(p^{(i)}) \bmod p^{(i)}$ für $i = 1, \ldots, J$. Daraus folgt analog Satz 7b die Behauptung.

Anmerkung: Satz 7b und 7c lassen sich auch aus Satz 3 herleiten.

Satz 8: *Sei N ungerade und genügend groß. Sei $N \not\equiv 1 \bmod 3$ für ungerades k, und $N \equiv 5 \bmod 24$ für gerades k. Dann ist N darstellbar in der Form*

$$N = p_1^2 + \cdots + p_4^2 + p_5^k.$$

Ein etwas allgemeineres Ergebnis dieser Art hat v. d. Corput (3) erhalten.

Der *Beweis* benützt Satz 3.

a) Sei k ungerade. Es ist $N - p_1^2 - p_2^2 \equiv 1 \bmod 2$ für $p_1, p_2 > 2$, und $N - p_1^2 - p_2^2 \equiv N - 2 \not\equiv 2 \bmod 3$ wegen $N \not\equiv 1 \bmod 3$. Danach verläuft der Beweis wie der von Satz 7b.

b) Sei k gerade. Da (von $p = 2, 3$ abgesehen) $p^2 \equiv 1 \bmod 3$ und $p^2 \equiv 1 \bmod 8$, also $p_2^2 \equiv 1 \bmod 24$ ist, so ist, wegen $N \equiv 5 \bmod 24$, $N - p_1^2 - p_2^2 \equiv 3 \bmod 24$ für $3 < p_1, p_2 < \frac{\sqrt{N}}{2}$.

Wir beschränken nun wieder p_1 und p_2 auf geeignete Kongruenzwerte. Modulo 5 geben wir in Form einer Tabelle an, welchen Kongruenzwert p_1 und p_2 haben sollen, je nach dem Kongruenzwert von N mod 5.

N	p_1	p_2	$N - p_1^2 - p_2^2$
0	1	1	3
1	1	2	1
2	2	2	4
3	1	2	3
4	1	2	4

Somit ist stets $N - p_1^2 - p_2^2 \not\equiv 0, 2 \bmod 5$.

Bezeichne π das Produkt aller Primzahlen $p^{(i)} > 5$ mit $p^{(i)} \equiv 3 \bmod 4$ und $(p^{(i)} - 1) \mid k$. Dann ist es wie im Beweise von Satz 7 und 7c möglich, eine Zahl x mit $(x, \pi) = 1$ zu finden, so daß für jedes $p^{(i)}$ mit $p^{(i)} > 5$, $p^{(i)} \equiv 3 \bmod 4$ und $(p^{(i)} - 1) \mid k$ gilt: $N - p_2^2 - p_1^2 \not\equiv 1 \bmod p^{(i)}$, wenn nur $p_1 \equiv x \bmod \pi$ ist.

Setzen wir noch

$$D_2(N) = \sum_{\substack{3 < n < N-3 \\ \varrho_2(n) > 0}} 1,$$

wobei $\varrho_2(n)$ die Darstellungsanzahl von n in der Form $n = p_1^2 + p_2^2$ mit $p_1 \equiv x \bmod \pi$ ist und wo p_1 und p_2 die durch die Tabelle gegebenen Kongruenzwerte mod 5 haben, so ist wie in Satz 7b: $D_2(N) > c_{51} \cdot \frac{N}{\log^5 N}$, woraus die Behauptung folgt.

Satz 9: *Wenn N ungerade und genügend groß ist, so ist N darstellbar in der Form*

$$N = p_1^3 + \cdots + p_8^3 + p_9^k.$$

Beweis (mit Hilfe von Satz 4): Sei

$$(6,2)\qquad \frac{1}{2}N^{\frac{1}{3}} \leqq p_1, p_2 \leqq \frac{3}{4}N^{\frac{1}{3}};\ \frac{1}{2}N^{\frac{4}{15}} \leqq p_3, p_4 \leqq \frac{3}{4}N^{\frac{4}{15}}.$$

Wir beschränken weiter $p_1, \ldots, p_4$, indem wir durch die folgenden beiden Tabellen je nach dem Kongruenzwert von N mod 7 bzw. mod 9 die Kongruenzwerte von $p_1, \ldots, p_4$ mod 7 und mod 9 vorschreiben:

(6, 3)				mod 7						mod 9				
N	p_1	p_2	p_3	p_4	$N-p_1^3-\cdots-p_4^3$	N	p_1	p_2	p_3	p_4	$N-p_1^3-\cdots-p_4^3$
0	−1	−1	−1	−1	4	0	1	1	1	1	5
1	1	−1	1	−1	1	1	1	−1	1	−1	1
2	1	−1	−1	−1	4	2	−1	−1	−1	−1	6
3	1	−1	1	−1	3	3	1	−1	1	−1	3
4	1	−1	1	−1	4	4	−1	−1	−1	1	6
5	1	−1	1	−1	5	5	1	−1	1	−1	5
6	1	−1	1	−1	6	6	1	−1	1	−1	6
						7	1	1	1	−1	5
						8	1	−1	1	−1	8

In jeder der 63 Möglichkeiten für N mod 63 sind damit die Kongruenzwerte von $p_1, \ldots, p_4$ mod 63 so festgelegt, daß

$$N - p_1^3 - \cdots - p_4^3 \equiv \begin{cases} 0,\ 2 \bmod 7, \\ 0,\ 2,\ -2,\ 4 \bmod 9 \end{cases}$$

ist. Sei

$$D_3(N) = \sum_{\substack{3 < n < N-3 \\ \varrho_3(n) > 0}} 1,$$

wobei $\varrho_3(n)$ die Darstellungsanzahl von n in der Form $n = p_1^3 + \cdots + p_4^3$ unter den Nebenbedingungen (6, 2) und (6, 3) für $p_1, \ldots, p_4$ bezeichnet.

Wegen Satz 4 braucht nur noch gezeigt zu werden, daß $D_3(N)$ größer als $c_{52} \cdot \dfrac{N}{\log^T N}$ mit einer festen Konstanten $T > 0$ ist. (Denn es ist $N - p_1^3 - \cdots - p_4^3 \equiv 1 \bmod 2$).

Dies geht genau so wie im Beweise von Satz 7b. Nach Lemma 1. 4 ist

$$\sum_{n=1}^{Q} r_3^2(n) = O\left(Q^{\frac{7}{5}}\right),$$

wenn $r_3(n)$ die Lösungsanzahl von

$$n = x_1^3 + \cdots + x_4^3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\frac{1}{2}Q^{\frac{1}{3}} < x_1, x_2 < Q^{\frac{1}{3}},\ \frac{1}{2}Q^{\frac{4}{15}} < x_3, x_4 < Q^{\frac{4}{15}}$$

ist. Und auf Grund des Primzahlsatzes gibt es jeweils mehr als

$$\frac{c_{53}}{\varphi(63)} \cdot \frac{N^{\frac{1}{3}}}{\log N}$$

Primzahlen p_1, p_2 mit (6, 2) und (6, 3) und mehr als

$$\frac{c_{54}}{\varphi(63)} \cdot \frac{N^{\frac{4}{15}}}{\log N}$$

Primzahlen p_3, p_4 mit (6, 2) und (6, 3). Damit wird

$$\sum_{3 < n < N-3} \varrho_3(n) > c_{55} \cdot \frac{N^{\frac{6}{5}}}{\log^4 N}$$

und somit

$$D_3(N) \geqq \frac{(\sum \varrho_3(n))^2}{\sum \varrho_3^2(n)} \geqq \frac{c_{55}^2 \cdot N^{\frac{12}{5}} \cdot (\log N)^{-8}}{N^{\frac{7}{5}}} = c_{56} \cdot \frac{N}{\log^8 N}.$$

Auf Grund der Ergebnisse des 5. Paragraphen lassen sich noch weitere Folgerungen ziehen. Man kann Kongruenzbedingungen für N finden, so daß sich jedes hinreichend große N in der Gestalt

$$p_1 + p_2^3 + \cdots + p_5^3 + p_6^k$$

oder

$$p_1 + p_2^2 + p_3^4 + p_4^4 + p_5^k$$

oder in analogen Gestalten, wo p_1 durch $p^2 + p'^2$ oder durch $p^2 + p'^4 + p''^4$ ersetzt ist, darstellen läßt.

Wir geben noch ohne Beweis folgende Sätze an:

Satz 10: *Sei $N \equiv 1 \bmod 2$. Dann ist N in der Gestalt*

$$N = p_1 + p_2^2 + p_3^3 + p_4^6 + p_5^k$$

darstellbar, wenn N nur hinreichend groß ist.

Satz 11: *Sei N gerade und hinreichend groß.*

Für ungerades k sei $N \not\equiv 2 \bmod 3$.

Für gerades k sei $N \equiv 0 \bmod 3$ und $N \equiv 6 \bmod 8$.

Falls $4 \mid k$ ist, sei noch zusätzlich $N \not\equiv 3 \bmod 5$.

Dann ist N in der Gestalt

$$N = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^4 + p_5^4 + p_6^k$$

darstellbar.

Satz 12: *Sei N ungerade und hinreichend groß.*

Für ungerades k sei $N \not\equiv 0 \bmod 3$.

Für gerades k sei: $N \equiv 1 \bmod 3$, $N \equiv 7 \bmod 8$
$N \not\equiv 4 \bmod 5$,
$N \not\equiv 1 \bmod 5$, *wenn* $4 \mid k$.

Dann ist N in der Gestalt

$$N = p_1^2 + p_2^4 + p_3^4 + p_4^2 + p_5^4 + p_6^4 + p_7^k$$

darstellbar.

Eingegangen 10. Juli 1959.

Struktur linearer Funktionalgleichungen im Zusammenhang mit dem Abelschen Theorem*).

Von *H. Kiesewetter* in Jena.

Inhalt.

§ 0. Einleitung.
I. Assoziative Strukturen.
§ 1. Die Additionstheoreme.
§ 2. Die Maximalzahl linear unabhängiger Lösungen im Falle $s \geqq p + 1$.
§ 3. Die Reduktion der Stufe.
§ 4. Assoziative Bedingungen für die Existenz nicht-trivialer Lösungen.
II. Zyklische Strukturen.
§ 5. Der Pentagrammazyklus und die Funktionalgleichung zweiter Stufe für den Eulerschen Dilogarithmus.
§ 6. Definition der zyklischen Umsetzung s-ter Stufe.
§ 7. Weitere Beispiele für zyklische Umsetzungen.
§ 8. Weitere Funktionalgleichungen über zyklischen Umsetzungen.
§ 9. Zyklische Strukturen allgemeinerer Art.

Zeichenerklärungen:

$\exists$ ..... Es existiert.
$\forall x$ ..... Für alle x.
$x \in \mathfrak{X}$ .... x Element von $\mathfrak{X}$.
$X \curvearrowright Y$ ... Aus X folgt Y.
$X \curvearrowleft Y$ ... Aus X folgt Y und aus Y folgt X.
$x \equiv y(m)$. x ist kongruent y modulo m.
$X \doteq Y$ ... X per definitionem gleich Y; die rechte Seite Y wird durch die linke Seite X definiert.

Gleichungen werden in jedem Paragraphen durchnumeriert. Bei Bezugnahme auf andere Paragraphen wird die Nummer des betreffenden Paragraphen zur Gleichung hinzugefügt; z. B. (0.8): § 0, Gleichung 8. Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

§ 0. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit linearen Funktionalgleichungen für Funktionen einer Veränderlichen der Form

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{s} a_i f(x_i) + \sum_{k=1}^{p} a_{s+k} f[\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s)] = A,$$

*) Diese Arbeit gibt bis auf einige Abänderungen und Umstellungen die gleichlautende Dissertation des Verfassers wieder, welche im Februar 1959 von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena angenommen wurde.

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Die $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s + p)$ und A bezeichnen Konstanten. Die abhängigen Argumente $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ denken wir uns als analytische Funktionen gegeben und alle Funktionen $f(x)$, welche diese Funktionalgleichung lösen, gesucht. Wir wollen uns aber darauf beschränken, alle analytischen Lösungen aufzusuchen.

Im Sinne einer allgemeinen Theorie dieser Funktionalgleichungen wäre u. a. die Beantwortung folgender Fragen wünschenswert:

Welche Bedingungen muß man den Argumentfunktionen $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ auferlegen, damit nichttriviale Lösungen existieren? Wie konstruiert man sämtliche analytischen Lösungen einer solchen Funktionalgleichung? Kann man in einer solchen Funktionalgleichung die Stufe s[1]) erniedrigen, ohne daß sich die Lösungsgesamtheit ändert? Für gewisse Funktionalgleichungen obiger Form werden wir gewisse Fragen beantworten können.

Im ersten Teil setzen wir uns mit den Funktionalgleichungen

$$\sum_{i=1}^{p+1} f(x_i) = \sum_{k=1}^{p} f[\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})], \tag{2}$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, auseinander. Für $p = 1$ enthalten diese Funktionalgleichungen die Additionstheoreme

$$f(x_1) + f(x_2) = f[\psi(x_1, x_2)] \tag{2'}$$

und für $p \geqq 1$ das Abelsche Theorem für ein Abelsches Integral erster Gattung $f(x)$ über einer algebraischen Riemannschen Fläche vom Geschlecht p.

Im Falle des Additionstheorems $(p = 1)$ bewies im Jahre 1826 N. H. Abel [2] unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen und im Jahre 1949 J. Aczél [5] nur unter Stetigkeits- und Monotonievoraussetzungen, daß assoziative Bedingungen für die Argumentfunktion $\psi(x_1, x_2)$ für die Existenz von nichttrivialen Lösungen der Funktionalgleichung (2′) ($f(x)$ nicht identisch gleich null) im wesentlichen notwendig und hinreichend sind. Wir werden also auf der Suche nach Existenzbedingungen für die Funktionalgleichung (2′) zu Aussagen über die Struktur der Argumentfunktion ψ geführt, die wir grob auch so formulieren können: Die Eigenschaft, daß die Verknüpfung $\psi(x_1, x_2) \doteq x_1 \circ x_2$ eine kommutative Gruppenoperation definiert, ist grundlegend für die Existenz von nichttrivialen Lösungen der Funktionalgleichung (2′).

Diese Aussage über die Funktionalgleichung (2′) läßt sich auf die Funktionalgleichungen (2) derart verallgemeinern, daß assoziative Bedingungen für die analytischen Argumentfunktionen $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ für die Existenz von nichttrivialen Lösungen der Funktionalgleichung (2) im wesentlichen notwendig und hinreichend sind. Die Beschreibung der durch die Argumentfunktionen $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ definierten Struktur nötigt uns, den Gruppenbegriff auf kommutative und assoziative algebraische Strukturen zu verallgemeinern, in welchen zu $p + 1$ beliebigen Elementen p simultane Verknüpfungen, sowie Einselement und inverse Elemente existieren. Für eine solche algebraische Struktur wird die Bezeichnung „kommutative p-wertige Gruppe" vorgeschlagen.

Neben die assoziativen Eigenschaften werden wir im zweiten Teil dieser Arbeit zyklische Eigenschaften der Argumentfunktionen stellen. Den Ausgangspunkt für diese

[1]) Die Stufe einer Funktionalgleichung ist definiert als Anzahl der unabhängigen Veränderlichen in der Funktionalgleichung (W. Maier [25], sowie [6]).

Untersuchungen bildet eine Bemerkung von L. J. Rogers [31], S. 174, über die Funktionalgleichung zweiter Stufe

$$(3)\qquad L(x) + L(y) + L\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + L(1-xy) + L\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) = 0,$$

identisch in x, y, für den Eulerschen Dilogarithmus in der symmetrischen Normierung

$$(4)\qquad L(x) = \int_{\omega}^{x} dt \left[\frac{\log(1-t)}{t} + \frac{\log t}{1-t}\right], \quad \omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Rogers stellte fest, daß diese fünf Argumente, genommen in der Anordnung

$$(3')\qquad x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = \frac{1-x_1}{1-x_1x_2},\ x_4 = 1 - x_1x_2,\ x_5 = \frac{1-x_2}{1-x_1x_2},$$

einen Zyklus bilden, in welchem jeder Bestandteil dieselbe Funktion der zwei vorhergehenden ist.

$$(3'')\qquad x_{\nu+2} = \frac{1-x_\nu}{1-x_\nu x_{\nu+1}} \doteq \varphi(x_\nu, x_{\nu+1}) \ (\nu \bmod 5).$$

Derselbe Zyklus findet sich, und das ist überraschend, als Ausdruck für die Napiersche Regel bzw. für das Pentagramma Mirificum von C. F. Gauss [17] (vgl. W. Maier [23]). Es sei erwähnt, daß die Funktionalgleichung zweiter Stufe für den Dilogarithmus auch durch Zusammensetzung von Inhaltsmaßen im dreidimensionalen Raum konstanter Krümmung bewiesen werden kann (W. Maier [24]) und daß bei der Untersuchung von Geweben (W. Blaschke-G. Bol [7], S. 265) dieselben zyklisch gebundenen fünf Argumente in Erscheinung treten. Diese Tatsachen sollen aber hier nicht weiter verfolgt werden. Vielmehr ist es das Bestreben des Verfassers, durch eine genaue Analyse der vorliegenden zyklischen Bindung zu einer begrifflichen Fixierung vorzustoßen, die sich als eine sinnvolle Verallgemeinerung des dem Pentagramma Mirificum zugrunde liegenden Zyklus erweist. Diese Bemühungen führen zum Begriff der „zyklischen Umsetzung s-ter Stufe der Ordnung n," der andererseits auch als eine Verallgemeinerung des Begriffes der Iteration einer Funktion von einer Veränderlichen auf eine Funktion von mehreren Veränderlichen oder als Abbildung von s unabhängigen Exemplaren einer Riemannschen Fläche in diese Fläche verstanden werden kann und durch diese ergänzenden Interpretationen dem Leser nahegebracht werden soll. Man erfaßt den Begriff der „zyklischen Umsetzung $\mathfrak{u}$ s-ter Stufe der Ordnung n" grob durch die Formeln

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{u}: \quad x_{\nu+s} = \varphi(x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_{\nu+s-1}), \\ &\exists\, n > s,\ x_{\nu+n} = x_\nu \text{ für alle } \nu \equiv 0\ (1). \end{aligned}$$

Wir werden weitere Beispiele solcher zyklischer Umsetzungen konstruieren. Insbesondere lassen sich aus dem schiefwinkligen sphärischen Dreieck, aus jedem sphärischen Polygon und aus Schläflis Orthoschemketten zyklische Umsetzungen ablesen, welche natürliche Verallgemeinerungen des Pentagrammazyklus am rechtwinkligen sphärischen Dreieck sind.

Diese Zyklen finden sich z. T. wieder in den Argumenten linearer Funktionalgleichungen. So ist das Additionstheorem des elliptischen Integrals erster Gattung diejenige lineare Funktionalgleichung, welche dem Quadrat der zyklischen Umsetzung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks mit konstantem Modul zuzuordnen ist. Der Modul des elliptischen Integrals erster Gattung ist identisch mit dem

$$\text{Modul} = \frac{\sin(\text{Winkel})}{\sin(\text{Gegenseite})}$$

des sphärischen Dreiecks, und seine Bedeutung wird unterstrichen durch die Tatsache, daß er eine Kovariante (Def. S. 151) der zyklischen Umsetzung am schiefwinkligen sphärischen Dreieck ist. Die zyklische Umsetzung gibt das Mittel an die Hand, um die bereits von J. L. Lagrange [22] gegebene Verbindung des Additionstheorems des elliptischen Integrals erster Gattung mit den Formeln der sphärischen Trigonometrie einem allgemeinen Prinzip unterzuordnen.

Auch in jedem anderen Additionstheorem in der Form

$$f(x_1) + f(x_2) + f[\varphi(x_1, x_2)] = 0, \tag{6}$$

identisch in x_1, x_2, sind die Argumente zyklisch verknüpft. Es können also die Funktionalgleichung zweiter Stufe für den Dilogarithmus und jedes Additionstheorem einheitlich als lineare Funktionalgleichungen über zyklischen Umsetzungen verstanden werden.

Auch für die Argumente der Funktionalgleichung

$$\sum_{i=1}^{p+1} f(x_i) + \sum_{k=1}^{p} f\{\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})\} = 0, \tag{7}$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, werden wir zyklische Bindungen feststellen. Diese führen jedoch über den bisherigen Begriff der zyklischen Umsetzung hinaus.

Zyklische Verknüpfungen zwischen den Argumenten einer linearen Funktionalgleichung sind aber nicht hinreichend für die Existenz von nichttrivialen Lösungen, denn wir werden ein Beispiel dafür angeben, daß die einer zyklischen Umsetzung zugeordnete lineare Funktionalgleichung als differenzierbare Lösungen nur die triviale Lösung $f(x) = 0$, identisch in x, zuläßt.

I. Assoziative Strukturen.

§ 1. Die Additionstheoreme.

In diesem Paragraphen betrachten wir die Funktionalgleichung

$$f(x_1) + f(x_2) = f[\psi(x_1, x_2)], \tag{0.2'}$$

identisch in x_1, x_2. Um die Untersuchungen in den folgenden Paragraphen vorzubereiten, wollen wir die bekannten Aussagen über die Funktionalgleichung (0.2′) kurz reproduzieren.

Wir setzen durchweg voraus: $\psi(x_1, x_2)$ ist eine eindeutige analytische[2]) Funktion von zwei Veränderlichen, bzw. eine eindeutige analytische Funktion von zwei Veränderlichen auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ mit zusätzlicher Zweigfixierung des Funktionswertes ψ auf $\mathfrak{X}$.

Wir beweisen zunächst: *Aus den Voraussetzungen*

(1′) $\exists$ *eine analytische Lösung* $f_0(x) = u$, $x = f_0^{-1}(u)$ *im Großen eindeutig*:

(1″) $\exists\, e \in \mathfrak{X}$, $f_0(e) = 0$;

(1‴) $\forall\, x \in \mathfrak{X}\ \exists\, j(x)$, $f_0(x) + f_0[j(x)] = 0$

folgen die Beziehungen

(2′) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\, \psi(x_1, x_2) \doteq \psi_i(x_1, x_2)$ *nicht identisch null für* $i = 1, 2$;

(2″) $\psi\{\psi(x_1, x_2), x_3\} = \psi\{x_1, \psi(x_2, x_3)\} \doteq \psi(x_1, x_2, x_3)$;

[2]) „analytisch" kann für reelle Veränderliche durch „einmal stetig differenzierbar" ersetzt werden.

$(2''')$ $\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$;

(2^{IV}) $\exists\, e \in \mathfrak{X},\ \forall x \in \mathfrak{X} \sim \psi(x, e) = x$;

(2^{V}) $\forall x \in \mathfrak{X}\, \exists\, j(x),\ \psi\{x, j(x)\} = e$, *$j(x)$ ist eindeutig bestimmt.*

Aus $(1')$ *allein folgen die Beziehungen* $(2')$ *bis* $(2''')$.

Zum Beweise setzen wir $f_0(x)$ in die Funktionalgleichung $(0.2')$ ein und differenzieren partiell nach x_1:

$$f_0'(x_1) = f_0'[\psi(x_1, x_2)]\, \psi_1(x_1, x_2).$$

$\psi_1(x_1, x_2) = 0$, identisch in x_1, x_2, würde zur Folge haben, daß $f_0'(x_1) = 0$ ist, identisch in x_1. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung $(1')$.

Durch Iteration folgt aus der Funktionalgleichung $(0.2')$ mit $f = f_0$

$$f_0(x_1) + f_0(x_2) + f_0(x_3) = f_0[\psi\{\psi(x_1, x_2),\ x_3\}] = f_0[\psi\{x_1,\ \psi(x_2, x_3)\}]$$

und daraus mit Hilfe der eindeutig bestimmten Umkehrfunktion $x = f_0^{-1}(u)$

$$\psi\{\psi(x_1, x_2),\ x_3\} = \psi\{x_1,\ \psi(x_2, x_3)\} = f_0^{-1}[f_0(x_1) + f_0(x_2) + f_0(x_3)].$$

Direkt aus der Funktionalgleichung erhält man

$$\psi(x_1, x_2) = f_0^{-1}[f_0(x_1) + f_0(x_2)] = \psi(x_2, x_1).$$

Setzt man in der Funktionalgleichung $x_2 = e$, dann ergibt sich

$$f_0(x_1) = f_0[\psi(x_1, e)],$$

identisch in x_1, woraus

$$\psi(x_1, e) = x_1 \text{ für alle } x_1$$

folgt. Die Substitution $x_2 = j(x_1)$ liefert

$$f_0(x_1) + f_0[j(x_1)] = 0 = f_0[\psi\{x_1, j(x_1)\}] = f_0(e),$$

also nach Auflösung

$$\psi\{x_1, j(x_1)\} = e.$$

$j(x_1)$ ist eindeutig bestimmt, weil aus der Annahme zweier Elemente $j_1(x_1)$ und $j_2(x_1)$ mit diesen Eigenschaften durch Subtraktion der beiden Gleichungen

$$f_0(x_1) + f_0[j_i(x_1)] = 0,\ i = 1, 2,$$

die Identität

$$f_0[j_1(x_1)] = f_0[j_2(x_1)]$$

und daraus $j_1(x_1) = j_2(x_1)$ folgen würde.

Umgekehrt läßt sich folgendes beweisen:

Wenn für $\psi(x_1, x_2)$ die Bedingungen $(2')$ bis (2^{v}) erfüllt sind, dann gelten die Aussagen:

$(1')^*$ $\exists$ *eine analytische Lösung $f_0(x) = u$, $x = f_0^{-1}(u)$ im Kleinen eindeutig;*

$(1'')$ *und* $(1''')$.

Wir führen den Abelschen Beweis in einer Form vor, in welcher er später auf die Funktionalgleichung (0.2) $(p > 1)$ verallgemeinert werden soll. Wir differenzieren die Gleichung

$$(2'') \qquad \psi\{\psi(x_1, x_2), x_3\} = \psi\{x_1, \psi(x_2, x_3)\} \doteq \psi(x_1, x_2, x_3)$$

in Richtung der Kurvenscharen $\psi(x_1, x_2) =$ konstant und $x_3 =$ konstant. Diese Richtungsdifferentiation wird durch den Differentialoperator

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \psi_1(x_1, x_2) & \psi_2(x_1, x_2) \end{vmatrix} \doteq D_\psi$$

geleistet (vgl. [21]). Durch Differentiation mit diesem Operator D_ν folgt mit den Abkürzungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\psi(x_1, x_2, x_3) = \psi_i(x_1, x_2, x_3)$$

aus Gleichung (2″)

$$\begin{aligned} 0 &= \psi_1(x_1, x_2, x_3)\, D_\nu x_1 + \psi_2(x_1, x_2, x_3)\, D_\nu x_2 \\ &= \psi_1(x_1, x_2, x_3)\, \psi_2(x_1, x_2) - \psi_2(x_1, x_2, x_3)\, \psi_1(x_1, x_2), \end{aligned}$$

also

$$\frac{\psi_2(x_1, x_2)}{\psi_1(x_1, x_2)} = \frac{\psi_2(x_1, x_2, x_3)}{\psi_1(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\psi_2\{x_1, \psi(x_2, x_3)\}}{\psi_1\{x_1, \psi(x_2, x_2)\}}\psi_1(x_2, x_3). \tag{4}$$

Nun wählen wir $x_1 = c_1 =$ konstant, so daß $\psi_1(c_1, x_2) \neq 0$ ist, und setzen

$$\int_e^x dt\, \frac{\psi_2(c_1, t)}{\psi_1(c_1, t)} \doteq f_0(x). \tag{5}$$

Dann erhalten wir aus der Gleichung (4)

$$f_0'(x_2) = f_0'[\psi(x_2, x_3)]\, \psi_2(x_2, x_3)$$

und durch Integration bezüglich x_2

$$f_0[\psi(x_2, x_3)] = f_0(x_2) + g(x_3).$$

Bis hierher haben wir nur die Bedingungen (2′) und (2″) benutzt. Wenn wir jetzt $x_2 = e$ setzen, folgt $g(x_3) = f_0[\psi(e, x_3)] = f_0(x_3)$, also

$$f_0(x_2) + f_0(x_3) = f_0[\psi(x_2, x_3)].$$

Die durch Gleichung (5) definierte Funktion $f_0(x)$ ist eine Lösung der Funktionalgleichung (0.2′) mit den behaupteten Eigenschaften, denn sie ist als analytische[2]) Funktion, deren Ableitung nicht identisch verschwindet, im Kleinen eindeutig umkehrbar und erfüllt die Eigenschaften (1″) und (1‴).

Die Eigenschaften (2′) bis (2ᵛ), welche notwendig bzw. hinreichend sind für die Existenz einer nichttrivialen Lösung $f_0(x)$, die im Großen bzw. im Kleinen eindeutig umkehrbar ist, bewirken, daß die Verknüpfung $\psi(x_1, x_2) \doteq x_1 \circ x_2$ auf $\mathfrak{X}$ eine kommutative analytische Gruppenoperation definiert.

Für die Verallgemeinerung auf die Funktionalgleichung (0.2) ($p > 1$) brauchen wir einige vorbereitende Aussagen, die wir in den Paragraphen 2 und 3 beweisen wollen.

§ 2. Die Maximalzahl linear unabhängiger Lösungen im Falle $s \geqq p + 1$.

Wir wenden uns nun den homogenen linearen Funktionalgleichungen

$$\sum_{i=1}^{s} f(x_i) = \sum_{k=1}^{p} f[\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s)], \quad s \geqq p + 1, \tag{1}$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_s$, zu und treffen noch folgende Voraussetzungen:

(2′) *Die Argumente $x_1, x_2, \ldots, x_s$ sind unabhängig voneinander in einem zusammenhängenden Gebiet (bzw. in einer Riemannschen Fläche) $\mathfrak{X}$ variabel.*

(2'') *Die p abhängigen Argumente $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ sind für alle $x_i \in \mathfrak{X}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ definiert und eindeutige*[3]) *analytische*[2]) *Funktionen von s Veränderlichen auf $\mathfrak{X}$. Die Funktionswerte ψ_k liegen ebenfalls in $\mathfrak{X}$ und sind in $\mathfrak{X}$ (d. h. einschließlich ihrer Blattzahl in $\mathfrak{X}$) eindeutig fixiert.*

(2''') *Die Funktionen $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ sind funktional unabhängig, d. h. es existiert ein $2s$- (bzw. s-) dimensionales Gebiet $\mathfrak{X}_0^{(s)}$, in welchem die Funktionaldeterminanten (Jacobischen Determinanten)*

$$\begin{vmatrix} \psi_{1,i_1} & \psi_{1,i_2} & \cdots & \psi_{1,i_p} \\ \psi_{2,i_1} & \psi_{2,i_2} & \cdots & \psi_{2,i_p} \\ \cdots & & & \\ \psi_{p,i_1} & \psi_{p,i_2} & \cdots & \psi_{p,i_p} \end{vmatrix} \doteq \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p})} \qquad (1 \leqq i_l < i_{l+1} \leqq s)$$

mit $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s) \doteq \psi_{k,i}$ *nicht verschwinden.*

Die Bedingung $s \geqq p + 1$ ist für die folgenden Betrachtungen wesentlich. Falls die Stufe s kleiner oder höchstens gleich der Anzahl p der funktional unahhängigen Argumente ψ_k ist, versagen unsere Beweismethoden.

Wir untersuchen zunächst die Mannigfaltigkeit der Lösungen $f(x)$ der Funktionalgleichung (1), wenn die $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ vorgegeben und die Voraussetzungen (2') bis (2''') erfüllt sind. Wir beweisen den folgenden Satz:

(3) *Es gibt höchstens p linear unabhängige analytische*[2]) *Lösungen der Funktionalgleichung* (1).

Wir führen den Beweis, indem wir zeigen, daß $p + 1$ analytische[2]) Lösungen der Funktionalgleichung (1) linear abhängig sind. Unserem Vorgehen liegt ein Verfahren zugrunde, welches von N. H. Abel [1] zur Bestimmung der Lösungen von Funktionalgleichungen zweiter Stufe angegeben wurde. Indem wir dieses Verfahren für unsere Zwecke verallgemeinern, gelangen wir zu einer Gleichung, welche aus der Funktionalgleichung (1) dadurch entsteht, daß man die Glieder $f[\psi_k]$ durch Differentiation eliminiert. Auf diese Gleichung stützt sich der Beweis. Auf Grund der Voraussetzung $s \geqq p+1$ gelingt die Elimination der Glieder $f[\psi_k]$ in einem Schritt. Wir halten

$$\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \text{konstant für } k = 1, 2, \ldots, p;$$
$$x_{p+i} = \text{konstant für } i = 2, \ldots, s - p, \text{ falls } s > p + 1 \text{ ist.}$$

Im Falle reeller Veränderlicher $x_1, x_2, \ldots, x_s$ wird durch diese Festsetzung im s-dimensionalen euklidischen Raum mit den kartesischen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_s$ eine $(s - 1)$-parametrige Schar von Kurven ausgesondert, längs denen wir differenzieren wollen. Bei komplexen Veränderlichen erhalten wir entsprechend im $2s$-dimensionalen komplexen Raum eine $(2s - 2)$-parametrige Schar von zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten. Die partielle Differentiation längs diesen Kurven (bzw. Untermannigfaltigkeiten) wird durch den folgenden Differentialoperator (vgl. [21])

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_{p+1}} \\ \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \cdots & \psi_{1,p+1} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \cdots & \psi_{2,p+1} \\ \cdots & & & \\ \psi_{p,1} & \psi_{p,2} & \cdots & \psi_{p,p+1} \end{vmatrix} \doteq D_\psi, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s) \doteq \psi_{k,i},$$

[3]) Es genügt bereits, wenn das p-tupel der ψ_k als Gesamtheit in Abhängigkeit von den s Veränderlichen x_i auf $\mathfrak{X}$ eindeutig bestimmt ist, so daß die ψ_k gemäß der Definition S. 129 p-wertig fixierte analytische Funktionen von s Veränderlichen auf $\mathfrak{X}$ sind.

geleistet, der (für $p = 1$) im wesentlichen von N. H. Abel [1] vorgeschlagen wurde. Die Anwendung des Differentialoperators (4) auf die Funktionalgleichung (1) liefert

$$\sum_{i=1}^{p+1} f'(x_i)\, D_{\psi,i}(x_1, x_2, \ldots, x_s) = 0, \tag{5}$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_s$, wobei

$$(-1)^{i+1} \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}, x_{i+1}, \ldots, x_{p+1})} = D_\psi x_i \tag{5'}$$
$$\doteq D_{\psi,i}(x_1, x_2, \ldots, x_s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p+1)$$

gesetzt und die Kettenregel für den Operator D_ψ verwendet wurde.

In der Gleichung (5) kommen die abhängigen Argumente $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$ nicht mehr unter dem Funktionszeichen vor. Lösungsfunktionen und abhängige Argumente sind voneinander getrennt.

Aus der Gleichung (5) beweisen wir in wenigen Schritten unseren Satz. Wir betrachten $p + 1$ analytische[2]) Lösungen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{p+1}(x)$ der Funktionalgleichung (1), von denen wir ohne Einschränkung annehmen können, daß ihre Ableitungen $f'_k(x)$ nicht identisch verschwinden. Wenn wir diese Lösungen $f_k(x)$ in die Gleichung (5) einsetzen, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{p+1} f'_k(x_i)\, D_{\psi,i}(x_1, x_2, \ldots, x_s) = 0 \text{ für } k = 1, 2, \ldots, p+1, \tag{6}$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Bildet man aus den $p + 1$ Komponenten $f'_k(x)$ die Vektorfunktion

$$\{f'_1(x), f'_2(x), \ldots, f'_{p+1}(x)\} \doteq \mathfrak{f}'(x),$$

dann schreibt sich das Gleichungssystem (6) in der Form

$$\sum_{i=1}^{p+1} \mathfrak{f}'(x_i)\, D_{\psi,i}(x_1, x_2, \ldots, x_s) = 0, \tag{6'}$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Wir wählen in Gleichung (6') $x_i = c_i =$ konstant für $i = 1, 2, \ldots, p, p+2, \ldots, s$ dergestalt, daß

$$D_{\psi,p+1}(c_1, c_2, \ldots, c_p, x_{p+1}, c_{p+2}, \ldots, c_s) \neq 0$$

ist, wenn x_{p+1} in einem Gebiet $\mathfrak{X}_0$ von $\mathfrak{X}$ variiert. Das ist auf Grund der Bedingung (2''') möglich. Wir erhalten

$$\mathfrak{f}'(x) = -\sum_{i=1}^{p} \mathfrak{f}'(c_i) \frac{D_{\psi,i}(c_1, \ldots, c_p, x, c_{p+2}, \ldots, c_s)}{D_{\psi,p+1}(c_1, \ldots, c_p, x, c_{p+2}, \ldots, c_s)} \tag{6''}$$

für $x \in \mathfrak{X}_0$. Nun begeben wir uns in den $(p + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum und betrachten in ihm die Menge der Vektoren $\mathfrak{f}'(x)$ mit variablem $x \in \mathfrak{X}_0$. Die Menge dieser Vektoren liegt wegen Gleichung (6'') in dem Unterraum U, welcher von den p festen Vektoren $\mathfrak{f}'(c_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ aufgespannt wird und höchstens die Dimension p erreicht. Dieser Unterraum U ist fest, d. h. unabhängig von x, wenn die Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_p, c_{p+2}, \ldots, c_s$ fest vorgegeben sind. Daraus folgt aber nach bekannten Sätzen der linearen Algebra die Existenz eines konstanten, d. h. von x unabhängigen Vektors $\mathfrak{d}$, dessen Komponenten $d_1, d_2, \ldots, d_{p+1}$ nicht alle verschwinden und der auf allen Vektoren des Unterraumes U senkrecht steht. Es verschwindet also das skalare Produkt

$$\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{f}'(x) = \sum_{k=1}^{p+1} d_k f'_k(x) = 0,$$

identisch in $x \in \mathfrak{X}_0$.

Durch Integration erhält man daraus

$$\sum_{k=1}^{p+1} d_k f_k(x) = \text{konstant},$$

identisch in $x \in \mathfrak{X}_0$, und die Konstante auf der rechten Seite muß verschwinden, wie man durch Einsetzen in die Funktionalgleichung (1) bestätigt. Also sind die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{p+1}(x)$ linear abhängig, d. h.

$$(7) \quad \exists\, d_k \text{ für } k = 1, 2, \ldots, p+1 \text{ mit } \sum_{k=1}^{p+1} |d_k| > 0, \sum_{k=1}^{p+1} d_k f_k(x) = 0,$$

identisch in $x \in \mathfrak{X}_0$.

Hat U die Dimension p' $(0 \leqq p' < p)$, dann gibt es $p+1-p'$ solche linear unabhängige, konstante Vektoren $\mathfrak{d}$ und $p'+1$ Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_{p'+1}$ sind bereits linear abhängig. p' kann in Sonderfällen bis nach null absinken, denn es gibt Funktionalgleichungen der Form (1), welche nur die identisch verschwindende Lösung $f(x) = 0$, identisch in x, zulassen (Beispiel S. 124).

Aus den vorangehenden Überlegungen ergeben sich verschiedene Bedingungen dafür, daß n Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ linear abhängig sind. Die Aussage

„*$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sind linear abhängig auf $\mathfrak{X}$*"

ist gleichbedeutend mit jeder der drei folgenden Bedingungen:

(7′) *$f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ existieren für alle $x \in \mathfrak{X}$ und sind auf $\mathfrak{X}$ eindeutig und $\exists$ Konstanten $d_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ mit $\sum_{\nu=1}^{n} |d_\nu| > 0, \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu f_\nu(x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{X}$;*

(7″) *$f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ existieren für alle $x \in \mathfrak{X}$ und sind auf $\mathfrak{X}$ eindeutig und es gilt*

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \cdots & & & \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \doteq \Delta(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0,$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wobei die $x_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ unabhängig voneinander alle Werte in $\mathfrak{X}$ durchlaufen;

(7‴) *$f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ existieren für alle $x \in \mathfrak{X}$ und sind auf $\mathfrak{X}$ eindeutig, für*

$$\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} \doteq \mathfrak{f}(x)$$

$\exists\, D_\nu(x_1, \ldots, x_n)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ mit $\sum_{\nu=1}^{n} |D_\nu| > 0$ für alle $x_\nu \in \mathfrak{X} (\nu = 1, 2, \ldots, n)$,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{f}(x_\nu)\, D_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wobei die $x_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ unabhängig voneinander alle Werte in $\mathfrak{X}$ durchlaufen.

Man beweist, daß diese drei Bedingungen zueinander äquivalent sind, indem man zeigt: Aus (7′) folgt (7″), aus (7″) folgt (7‴) und aus (7‴) folgt (7′). Die ersten beiden Schritte des Beweises ergeben sich aus dem bekannten Satz, daß ein homogenes lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Unbekannten dann und nur dann eine nichttriviale Lösung ($\{d_\nu\}$ bzw. $\{D_\nu\}$) besitzt, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Daß (7′) aus (7‴) folgt, schließt man wie oben beim Übergang von (6′) zu (7). Dabei ist wichtig, daß man die Koeffizienten d_ν als konstant erkennt.

Die unter (7″) eingeführte Determinante Δ geht in die Wronskische Determinante über, wenn man Δ als Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einmal partiell nach x_2, zweimal partiell nach $x_3, \ldots, (n-1)$-mal partiell nach x_n differenziert und danach $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = x_1$ setzt. Wir bezeichnen Δ als „*Unabhängigkeikeitsmaß*" oder als (verallgemeinerte) Wronskische Determinante. Das Unabhängigkeitsmaß hat den Vorteil, daß es auch auf nicht differenzierbare Funktionen anwendbar ist.

Im Anschluß an Gleichung (5) gewinnt man eine Darstellung der Lösungen der Funktionalgleichung (1). Wir wählen $c_i (i = 1, 2, \ldots, p, p+2, \ldots, s)$ wie in Gleichung (6′) und erhalten aus Gleichung (5)

$$(8) \qquad f'(x) = -\sum_{i=1}^{p} f'(c_i) \frac{D_{\varphi,i}(c_1, \ldots, c_p, x, c_{p+2}, \ldots, c_s)}{D_{\varphi,\, p+1}(c_1, \ldots, c_p, x, c_{p+2}, \ldots, c_s)}$$

und durch Integration bezüglich x von einer festen Stelle $x = \omega$ ab

$$(8') \qquad f(x) = -\sum_{i=1}^{p} f'(c_i) \int_{\omega}^{x} dx \frac{D_{\varphi,i}(c_1, \ldots, c_p, x, c_{p+2}, \ldots, c_s)}{D_{\varphi,p+1}(c_1, \ldots, c_p, x, c_{p+2}, \ldots, c_s)} + f(\omega).$$

Gleichung (8′) muß so interpretiert werden: Falls es eine Lösung $f(x)$ der Gleichung (1) gibt, dann läßt sie eine Darstellung der Form (8′) zu. Wenn man also die Lösungen der Funktionalgleichung (1) bestimmen will, muß man nachprüfen, welche der in Gleichung (8′) dargestellten Funktionen der Funktionalgleichung (1) Genüge leisten, wenn man die Integrationskonstante geeignet bestimmt. Mit dem Ansatz (8′) erfaßt man alle Lösungen der Funktionalgleichung (1), denn jede Lösung der Gleichung (1) gestattet eine Darstellung der Form (8′). Die Bestimmung der differenzierbaren Lösungen der Funktionalgleichung (1) bereitet also keine Schwierigkeiten.

Wir führen die Bezeichnungen *Rang* und *Fundamentalsystem* ein. $p' (0 \leqq p' < p)$ sei die Maximalzahl linear unabhängiger Lösungen der Funktionalgleichung (1). Wir nennen p' den Rang und ein System von p' linear unabhängigen Lösungen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{p'}(x)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen vom Rang p' zu der Funktionalgleichung (1). Die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung (1) ist eine Linearkombination der p' linear unabhängigen Lösungen

$$(9) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{p'} d_i f_i(x).$$

Aus dem Beweis für den Satz (3) ist ersichtlich, daß er ohne Abänderungen auf die etwas allgemeineren Funktionalgleichungen

$$(1)^* \qquad \sum_{i=1}^{s} a_i f(x_i) + \sum_{k=1}^{p} a_{s+k} f[\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s)] = 0,$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_s$, $s \geqq p+1$, $a_i \neq 0$ konstant für $i = 1, 2, \ldots, p+s$ übertragen werden kann. Die $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ sollen dieselben Voraussetzungen (2′) bis (2‴) erfüllen wie die $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s)$. Man erhält, wenn man überall die ψ_k durch die φ_k ersetzt, die Gleichungen

$$(5)^* \qquad \sum_{i=1}^{p+1} a_i f'(x_i) D_{\varphi,i}(x_1, x_2, \ldots, x_s) = 0,$$

$$(8')^* \qquad f(x) = -\sum_{i=1}^{p} \frac{a_i}{a_{p+1}} f'(c_i) \int_{\omega}^{x} dx \frac{D_{\varphi,i}(c_1, \ldots, c_p, x, c_{p+2}, \ldots, c_s)}{D_{\varphi,p+1}(c_1, \ldots, c_p, x, c_{p+2}, \ldots, c_s)} + f(\omega).$$

Die Gleichungen (5)* und (8')* gelten sogar für die „quasilinearen" Funktionalgleichungen

$$(1)^{**} \quad \sum_{i=1}^{s} a_i f(x_i) = A\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_l), \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p\}, \; s \geqq p+1,$$

in denen die $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s) \doteq \varphi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ die Bedingungen (2') bis (2''') erfüllen, $\alpha_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p) \doteq \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ gesetzt und die Funktion $A\{u_1, u_2, \ldots, u_l, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p\}$ bezüglich jeder ihrer Veränderlichen einmal stetig differenzierbar ist.

Durch Differentiation mit dem Differentialoperator D_φ wird nämlich die rechte Seite der Funktionalgleichung (1)** gleich Null. Im Falle der quasilinearen Funktionalgleichung (1)** kann man aber aus (5)* im allgemeinen nur schließen, daß die Ableitungen von $p+1$ Lösungen der Funktionalgleichung (1)** linear abhängig sind. Für die Lösungen selbst folgt nur

$$(7)^{**} \qquad \exists\, d_k \text{ für } k = 1, 2, \ldots, p+1 \text{ mit } \sum_{k=1}^{p+1} |d_k| > 0,$$

$$\sum_{k=1}^{p+1} d_k f_k(x) = \text{konstant, identisch in } x \in \mathfrak{X}_0,$$

und die Konstante muß nicht notwendig verschwinden. Wir fassen zusammen:

(3)* *Es gibt höchstens p linear unabhängige analytische*[2]) *Lösungen der Funktionalgleichung* (1)*.

(3)** *Es gibt höchstens p analytische*[2]) *Lösungen der quasilinearen Funktionalgleichung* (1)**, *deren Ableitungen linear unabhängig sind.*

Das Abelsche Theorem für die hyperelliptischen Integrale erster Gattung

$$(10) \qquad \int^{x} dt \frac{t^{k-1}}{\sqrt{R(t)}} \doteq f_k(x),$$

$$\sum_{\nu=0}^{2p+2} A_\nu x^{2p+2-\nu} \doteq R(x), \; k = 1, 2, \ldots, p$$

ist eine Funktionalgleichung von der Form (1). Es gilt (N. H. Abel [3])

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{p+1} f_k(x_i) + \sum_{i=1}^{p} f_k[\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})] = \text{konstant},$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, für $k = 1, 2, \ldots, p$. Die Argumente $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ sind die Schnittpunkte der festen Kurve $w^2 = R(x)$ mit den Kurven der Schar

$$w = \sum_{\nu=0}^{p+1} a_\nu x^{p+1-\nu}, \; A_0 \doteq a_0^2, \; a_\nu \text{ Parameter } \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p+1),$$

also die Wurzeln der Gleichung

$$(12) \qquad R(x) - \left(\sum_{\nu=0}^{p+1} a_\nu x^{p+1-\nu}\right)^2 \doteq G(x) = 0.$$

Die Parameter $a_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, p+1)$ müssen in Abhängigkeit von den $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ so bestimmt werden, daß $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ Wurzeln der Gleichung (12) sind. Aus dem Gleichungssystem

$$(13) \qquad R(x_i) \doteq w_i^2, \; w_i - a_0 x_i^{p+1} = \sum_{\nu=1}^{p+1} a_\nu x_i^{p+1-\nu}, \; i = 1, 2, \ldots, p+1$$

ergeben sich die $a_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, p+1)$ als linear gebrochene Funktionen von w_i, x_i^{p+1},

$x_i^p, \ldots, x_i$. Zur Bestimmung der p abhängigen Argumente $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ bleibt eine algebraische Gleichung p-ten Grades, deren Koeffizienten sich rational aus den Koeffizienten A_ν und a_ν bestimmen. Diese Koeffizienten sind also rationale Funktionen von $x_1, w_1, x_2, w_2, \ldots, x_{p+1}, w_{p+1}$ und als solche eindeutige Funktionen von den $p+1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ über der zweiblättrigen Riemannschen Fläche mit $2p+2$ Windungspunkten erster Ordnung, welche zu $w^2 = R(x)$ gehören.

Die p hyperelliptischen Integrale erster Gattung $f_k(x)$ gemäß Gleichung (10) bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen der Funktionalgleichung (11) mit maximalem Rang, denn ihre Ableitungen sind linear unabhängig, weil das Unabhängigkeitsmaß der $f_k'(x)$

$$\Delta(f_1', f_2', \ldots, f_p') = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{p} \sqrt{R(x_i)}} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{p-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_p & x_p^2 & \cdots & x_p^{p-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{1 \le i < j \le p} (x_j - x_i)}{\prod\limits_{i=1}^{p} w_i}$$

nicht identisch verschwindet.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} d_k f_k(x)$$

ist die allgemeine differenzierbare Lösung der Funktionalgleichung (11). Diese Funktionalgleichung ist eine kennzeichnende Eigenschaft des Systems der p hyperelliptischen Integrale erster Gattung vom Geschlecht p, denn sie besitzt diese und nur diese Lösungen. Das System der hyperelliptischen Integrale erster Gattung kann also durch die Funktionalgleichung (11) definiert werden. Entsprechendes gilt für das System der p linear unabhängigen Abelschen Integrale erster Gattung über einer allgemeinen algebraischen Riemannschen Fläche vom Geschlecht p (vgl. z. B. K. Weierstraß [34], S. 403ff).

Es sei noch ein Beispiel für eine Funktionalgleichung vom Typ (1) angefügt, welche nur die identisch verschwindende Lösung zuläßt. Wir betrachten

$$f(x) + f(y) + f(z) + f(x+y+z) + f(xyz) = 0. \tag{14}$$

identisch in x, y, z. Aus Gleichung (14) folgt

$$f(z) + f(x+y+z) + f(xyz) + f[x+y+z(2+xy)] + f[xyz^2(x+y+z)] = 0$$

und durch Subtraktion dieser Gleichung von Gleichung (14)

$$f(x) + f(y) = f[x+y+z(2+xy)] + f[xyz^2(x+y+z)],$$

identisch in x, y, z. Wir wählen $y + 2z + xyz = 0$. Daraus folgt $x = -\dfrac{y+2z}{yz}$ und

$$f(y) = f\left[\frac{(y+2z)\{y+2z-yz(y+z)\}}{y}\right],$$

identisch in y, z. Daraus ergibt sich aber $f(y) =$ konstant und durch Einsetzen in die Funktionalgleichung (14) $f(y) = 0$, identisch in y. Dabei wurde über die Lösung $f(y)$ nur vorausgesetzt, daß sie an den Stellen, an denen sie betrachtet wurde, existiert.

Zum Schluß dieses Parapraphen sei auf eine Arbeit von M. Ghermănescu [18] verwiesen, in welcher ähnliche Ergebnisse für gewisse lineare Funktionalgleichungen für eine Funktion von mehreren Veränderlichen bewiesen werden.

§ 3. Die Reduktion der Stufe.

Auf den Satz (2.3)* des letzten Paragraphen über die Maximalzahl linear unabhängiger Lösungen der „streng" linearen Funktionalgleichung (2.1)* läßt sich ein Beweis gründen, daß solche Funktionalgleichungen höherer Stufe $s > p + 1$ mit ebensolchen der Stufe $p + 1$ bezüglich der analytischen [2]) Lösungen äquivalent [4]) sind. Dazu setzen wir zusätzlich zu den Bedingungen (2.2′) bis (2.2‴) für die Funktionen $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ voraus, daß die Funktionalgleichung (2.1)* ein Fundamentalsystem von Lösungen mit maximalem Rang besitzt. Wir beweisen den folgenden Satz:

(1) *Wenn die Funktionalgleichung* (2.1)* *mit den Voraussetzungen* (2.2′) *bis* (2.2‴) *für die* φ_k p *linear unabhängige analytische* [2]) *Lösungen* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ *besitzt, welche alle an derselben Stelle* $x = e$ *verschwinden,* $f_k(e) = 0$ *für* $k = 1, 2, \ldots, p$, *dann sind die Funktionalgleichung* (2.1)* *mit* $s > p + 1$ *und die Funktionalgleichung*

$$\sum_{i=1}^{p+1} a_i f(x_i) + \sum_{k=1}^{p} a'_k f[\varphi_k^*(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})] = 0, \quad a'_k = a_{s+k}, \tag{2}$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, *mit*

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}, e, \ldots, e) \doteq \varphi_k^*(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$$

zueinander äquivalent bezüglich der analytischen [2]) *Lösungen.*

Der *Beweis* geht davon aus, daß sowohl die Funktionalgleichung (2.1)* als auch die Funktionalgleichung (2) höchstens p linear unabhängige analytische [2]) Lösungen besitzen können. Nach Voraussetzung ist also

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} d_k f_k(x) \tag{3}$$

die allgemeine analytische [2]) Lösung der Funktionalgleichung (2.1)*. Die Darstellung (3) liefert aber auch alle analytischen [2]) Lösungen der Funktionalgleichung (2), weil die Funktionalgleichung (2) höchstens p linear unabhängige analytische [2]) Lösungen besitzt. Damit ist die Äquivalenz bewiesen.

Wir schließen noch einige Bemerkungen an, welche sich auf die Bedeutung der Zahl p für die Summe von Funktionswerten einer Lösung der Funktionalgleichung (0.2) beziehen. Wir setzen auch hier zusätzlich zu den Bedingungen (2.2′) bis (2.2‴) für die ψ_k voraus, daß die Funktionalgleichung (0.2) ein Fundamentalsystem von Lösungen mit maximalem Rang p besitzt. $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ seien p linear unabhängige analytische [2]) Lösungen der Funktionalgleichung (0.2). Die lineare Unabhängigkeit der Lösungen $f_k(x)$ hat zur Folge, daß auch ihre Ableitungen $f'_1(x), f'_2(x), \ldots, f'_p(x)$ linear unabhängig sind; denn aus der Annahme, die Ableitungen seien linear abhängig, schließt man durch Integration, daß eine Konstante sich aus den $f_k(x)$ linear kombinieren läßt. Diese Konstante müßte aber Lösung der Funktionalgleichung sein und also verschwinden, was der Voraussetzung widerspricht, daß die $f_k(x)$ linear unabhängig sind.

Z. B. sind die Funktionen $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1 - x$ linear unabhängig. Sie können aber nicht linear unabhängige Lösungen einer linearen Funktionalgleichung vom Typ (0.2) sein, denn ihre Ableitungen sind linear abhängig.

Wenn $A(u_1, u_2, \ldots, u_{p-1})$ analytische [2]) Funktion jeder ihrer $(p - 1)$ Veränderlichen ist und wenn die $p - 1$ Funktionen $\chi_i(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ für $i = 1, 2, \ldots, p - 1$ die

[4]) Zwei Funktionalgleichungen heißen äquivalent bezüglich einer Funktionenklasse, wenn sie aus dieser Funktionenklasse dieselben Lösungen aussondern (vgl. [6]).

Bedingungen (2.2′) bis (2.2‴) an Stelle der ψ_k erfüllen, dann existiert keine Relation der Form

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i) = A\{f(\chi_1), f(\chi_2), \ldots, f(\chi_{p-1})\}, \tag{4}$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_p$, welche die Summe von p beliebigen Funktionswerten

$$\sum_{i=1}^{p} f_k(x_i)$$

für jede der Lösungen $f_k(x)$ durch dieselbe Funktion A auf $p-1$ (oder weniger) Funktionswerte $f_k(\chi_i)$ reduzieren würde. Die Annahme einer solchen Relation (4) für die Lösungen $f_k(x)$ der Funktionalgleichung (0.2) würde die Gleichung (4) zu einer quasilinearen Funktionalgleichung p-ter Stufe mit $p-1$ abhängigen Argumenten, aber p linear unabhängigen Lösungen machen, deren Ableitungen auch noch linear unabhängig sind. Das wäre aber ein Widerspruch zu Satz (2.3)**.

Dagegen läßt sich die Summe von $s \geqq p+1$ beliebigen Funktionswerten einer jeden Lösung der Funktionalgleichung (0.2) immer auf die Summe von nur p Funktionswerten reduzieren. Um das einzusehen, braucht man nur die Funktionalgleichung (0.2) zu iterieren. Aus der Gleichung (0.2) folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p+2} f(x_i) &= \sum_{k=1}^{p} f[\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})] + f(x_{p+2}) \\ &= \sum_{k=1}^{p} f[\psi_k\{\psi_1(x_1, \ldots, x_{p+1}), \ldots, \psi_p(x_1, \ldots, x_{p+1}), x_{p+2}\}].\end{aligned}$$

Entsprechendes gilt, wenn auf der linken Seite mehr als $p+2$ Summanden stehen.

Die beiden Aussagen über die Reduktion einer Summe von $s > p$ Funktionswerten auf p Funktionswerte und die Nichtreduzierbarkeit einer Summe von p Funktionswerten auf weniger als p Funktionswerte in der oben durch die Gleichung (4) präzisierten Art beleuchten die Sonderrolle der Zahl p für eine Summe von Funktionswerten der Lösungen der Funktionalgleichung (0.2).

§ 4. Assoziative Bedingungen für die Existenz nichttrivialer Lösungen.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf die Funktionalgleichung

$$\sum_{i=1}^{p+1} f(x_i) = \sum_{k=1}^{p} f[\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})], \tag{0.2}$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$. Es sollen die Voraussetzungen (2.2′) bis (2.2‴) für die Argumentfunktionen $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ erfüllt sein und p linear unabhängige analytische [2]) Lösungen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ existieren. Um die assoziativen Eigenschaften der Argumentfunktionen ψ_k aus der Funktionalgleichung abzuleiten, benötigen wir die eindeutige Auflösung des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{p} f_k(x_i) = u_k \text{ für } k = 1, 2, \ldots, p \tag{1}$$

nach den x_i. Wenn wir zu vorgegebenen Werten $u_1, u_2, \ldots, u_p$ eindeutig ein p-tupel von Argumenten $x_1, x_2, \ldots, x_p$ so bestimmen können, daß das Gleichungssystem (1) erfüllt ist, dann ist es ein leichtes, die assoziativen Eigenschaften der ψ_k zu beweisen.

Das Problem der Umkehrung des Gleichungssystems (1) wurde zuerst für den Fall, daß die $f_k(x)$ ein vollständiges System von linear unabhängigen hyperelliptischen Integralen erster Gattung sind, von C. G. J. Jacobi [20] gestellt, als er die Frage verfolgte, wie man die Umkehrung der elliptischen Integrale durch doppeltperiodische Funktionen sinnvoll auf höhere Abelsche Integrale verallgemeinern kann. Dieses nach ihm benannte Umkehrproblem fand seine Lösung durch die klassischen Arbeiten von A. Goepel [19] und G. Rosenhain [32] für die hyperelliptischen Integrale vom Geschlecht zwei und von B. Riemann [30] und K. Weierstraß [34] für die allgemeinen Abelschen Integrale beliebigen Geschlechts.

Wir wollen aber das Problem der Umkehrung des Gleichungssystems (1) betrachten, ohne daß wir notwendig Voraussetzungen algebraischer Natur über die ψ_k bzw. f'_k treffen. Wir stellen fest, daß die Funktionaldeterminante des Systems (1)

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} f'_1(x_1) & f'_1(x_2) & \cdots & f'_1(x_p) \\ f'_2(x_1) & f'_2(x_2) & \cdots & f'_2(x_p) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ f'_p(x_1) & f'_p(x_2) & \cdots & f'_p(x_p) \end{vmatrix} \doteq \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_p)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_p)} = \Delta(f'_1, f'_2, \ldots, f'_p)$$

identisch mit dem Unabhängigkeitsmaß Δ (vgl. (2.7'')) der Funktionen $f'_k(x)$ ist. Auf Grund der Voraussetzungen ist also die Funktionaldeterminante (2) eine analytische (bzw. stetige) Funktion der p Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_p$, welche nicht identisch verschwindet; denn wenn die $f_k(x)$ linear unabhängige Lösungen der Funktionalgleichung (0.2) sind, dann sind auch ihre Ableitungen $f_k(x)$ linear unabhängig. Daher existiert ein Punkt $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_p^{(0)})$ und eine $2p$- (bzw. p-)dimensionale Umgebung dieses Punktes, in welcher die Funktionaldeterminante (2) von null verschieden ist. Überhaupt kann die Funktionaldeterminante (2) als analytische Funktion höchstens längs Mannigfaltigkeiten der Dimension $2(p-1)$ verschwinden.

In jedem $2p$- (bzw. p-)dimensionalen Gebiet $\mathfrak{X}_0^{(p)}$, in welchem die Funktionaldeterminante (2) von null verschieden ist, gestattet das Gleichungssystem (1) eine im Kleinen eindeutige Auflösung durch analytische Funktionen (W. F. Osgood [28], C. Carathéodory [11]):

$$(1')\qquad x_i = \lambda_i(u_1, u_2, \ldots, u_p) \text{ für } i = 1, 2, \ldots, p,$$

welche, in die Gleichungen (1) eingesetzt, diese identisch in $u_1, u_2, \ldots, u_p$ befriedigen.

An den singulären Stellen, in welchen die Funktionaldeterminante (2) verschwindet, sind bei der Auflösung des Gleichungssystems (1) gesonderte Betrachtungen erforderlich, die ich nicht bringen werde. Im Falle der Abelschen Integrale erster Gattung wurde in den zitierten Arbeiten von B. Riemann [30] und K. Weierstraß [34] gezeigt, daß die elementarsymmetrischen Grundfunktionen der Umkehrfunktionen λ_i, also

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq p} \lambda_i \lambda_j, \quad \ldots, \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_p,$$

auch im Großen eindeutige analytische Funktionen von p Veränderlichen sind. Diese eindeutigen Funktionen nennt man *Abelsche Funktionen*. Wir gebrauchen in dem hier betrachteten allgemeinen Fall für die $\lambda_i(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ die Bezeichnungen *Jakobische Umkehrfunktionen* zu dem System $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ linear unabhängiger Funktionen.

Z. B. gehören zu dem System linear unabhängiger Funktionen $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2$, die Jacobischen Umkehrfunktionen

$$\lambda_{1,2}(u_1, u_2) = \frac{u_1 \pm \sqrt{2u_2 - u_1^2}}{2}.$$

Weil die x_i symmetrisch in die Gleichungen (1) eingehen, sind sie untereinander gleichberechtigt. Dasselbe gilt auch für die $\lambda_i(u_1, u_2, \ldots, u_p)$. Die Eindeutigkeit der Jacobischen Umkehrfunktionen λ_i ist so zu verstehen, daß bei Vorgabe der Funktionen $f_k(x)$ und der Werte u_k die Gesamtheit der p Funktionswerte $\lambda_i(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, welche die Gleichungen (1) und (1′) erfüllen, eindeutig bestimmt ist. Dagegen läßt es sich grundsätzlich nicht entscheiden, welcher der p Funktionswerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ z. B. gleich x_1 zu setzen ist. Weil die Gleichungen (1) die x_i symmetrisch enthalten, ist die Zuordnung eines festen Funktionswertes λ_{i_0} zu einem der Argumente x_i nicht eindeutig bestimmt. Man kann willkürlich den Funktionswert λ_{i_0} jedem der p Argumente $x_1, x_2, \ldots, x_p$ zuordnen. Es ist aber eindeutig bestimmt, daß p und nur p simultane Funktionswerte $\lambda_i(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ existieren, welche die Gleichungen (1) und (1′) befriedigen, und daß jeder dieser p Funktionswerte λ_i einem und nur einem der x_i gleich ist. Wir haben in (1′) willkürlich die Bezeichnungen so gewählt, daß $x_i = \lambda_i$ gilt. Wir können auch sagen: Die x_i bzw. die λ_i sind durch die Gleichungen (1) nur bis auf beliebige Permutationen eindeutig bestimmt.

Für unsere Zwecke ist es nicht ausreichend, wenn wir wissen, daß das Gleichungssystem (1) sich im Kleinen eindeutig umkehren läßt. Wir brauchen genau wie im Falle $p = 1$ die eindeutige Umkehrbarkeit im Großen, denn wir wollen aus dem Bestehen der p Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{p} f_k(x_i) = \sum_{l=1}^{p} f_k(y_l) = u_k \text{ für } k = 1, 2, \ldots, p \tag{3}$$

schließen, daß das p-tupel (x_i) mit dem p-tupel (y_l) bis auf eine Permutation der Elemente identisch ist.

Wir setzen also zusätzlich voraus, daß bei fest vorgegebenen p linear unabhängigen Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ zu jedem beliebigen p-tupel $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, das aus dem Wertevorrat der Funktionssummen

$$\left\{\sum_{i=1}^{p} f_1(x_i), \sum_{i=1}^{p} f_2(x_i), \ldots, \sum_{i=1}^{p} f_p(x_i)\right\}$$

entnommen ist, ein und nur ein (ungeordnetes) p-tupel (x_i) $(i = 1, 2, \ldots, p)$ existiert, welches das Gleichungssystem (1) erfüllt. Mit anderen Worten: Das Gleichungssystem (1) soll im Großen eindeutig umkehrbar sein.

Diese Voraussetzung ist insbesondere erfüllt, wenn die $f_k(x)$ ein Fundamentalsystem von p linear unabhängigen Abelschen Integralen erster Gattung über einer algebraischen Riemannschen Fläche vom Geschlecht p sind. In diesem Fall ergeben sich die Jacobischen Umkehrfunktionen $\lambda_i(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ als Wurzeln einer algebraischen Gleichung p-ten Grades, deren Koeffizienten für jedes endliche Wertsystem $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ eindeutige analytische Funktionen von $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sind. Die einzelne Funktion $\lambda_i(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ ist zwar nicht eindeutig im Großen, wohl aber das p-tupel der $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ als Gesamtheit.

Im allgemeinen Fall ist die eindeutige Umkehrbarkeit des Systems (1) in dem oben beschriebenen Sinn durch unsere bisherigen Betrachtungen nur im Kleinen gesichert. Man kann aber die Umgebung eines Punktes, in welcher eindeutige Umkehrbar-

keit möglich ist, so weit ausdehnen, daß die eindeutige Umkehrbarkeit in dieser erweiterten Umgebung gerade noch möglich ist und muß dann die Betrachtungen auf solche Teilgebiete beschränken.

Nun schließen wir aus den Gleichungen (3):

(3′) *Wenn ein Gebiet $\mathfrak{X}'^{(p)}$ existiert, in welchem das System* (1) *ein im Großen eindeutig bestimmtes p-tupel von Jacobischen Umkehrfunktionen* $\{\lambda_i(u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *besitzt und wenn die beiden fest gewählten p-tupel* (x_i) *und* (y_l) *in* $\mathfrak{X}'^{(p)}$ *liegen und das Gleichungssystem* (3) *befriedigen, dann existiert eine Permutation* $(l_1, l_2, \ldots, l_p)$ *der Zahlen* $(1, 2, \ldots, p)$, *so daß die Gleichungen* $x_i = y_{l_i}$ *für* $i = 1, 2, \ldots, p$ *erfüllt sind.*

Nach Voraussetzung ist nämlich durch die Gleichungen (1) das p-tupel (x_i) eindeutig bestimmt. Wenn also ein zweites p-tupel existiert, welches dieselben Gleichungen befriedigt, dann muß es bis auf eine Permutation der Elemente mit dem p-tupel (x_i) übereinstimmen.

Die paarweise Zuordnung der x_i zu den y_l als Ergebnis der Auflösung des Gleichungssystems (3) verdient noch eine besondere Erläuterung. Die x_i sind ebenso wie die y_l gleichberechtigte Elemente je eines p-tupels. Die paarweise Zuordnung ist nur so weit fixiert, als feststeht, daß jedes der x_i genau einem der y_l und umgekehrt auch jedes der y_l genau einem der x_i gleich ist. Es läßt sich aber nicht entscheiden, welches der x_i mit welchem der y_l übereinstimmt.

Wir werden eine solche Gleichheit zwischen zwei p-tupeln eine *p-wertig fixierte Gleichheit* nennen und definieren:

$$(x_i) \overset{(p)}{=} (y_l)$$

(„*Das p-tupel* (x_i) *ist p-gleich dem p-tupel* (y_l)“)

ist per definitionem äquivalent damit, daß eine Permutation $(l_1, l_2, \ldots, l_p)$ *aus der symmetrischen Gruppe* $\mathfrak{S}_p$ *der Permutationen der p Zahlen* $(1, 2, \ldots, p)$ *existiert, so daß die gewöhnlichen Gleichungen* $x_i = y_{l_i}$ *für* $i = 1, 2, \ldots, p$ *gelten.*

Eine einwertig fixierte Gleichheit ist eine Gleichheit im gewöhnlichen Sinne. Zwei p-tupel sind p-gleich, wenn sie bis auf eine Permutation ihrer Elemente identisch sind. Beispiel:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

p Elemente sollen *p-wertig fixiert* heißen, wenn sie bis auf eine Permutation aus der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_p$ eindeutig bestimmt sind.

Die p-wertig fixierte Gleichheit ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, d. h.

$$\begin{aligned}
&(x_i) \overset{(p)}{=} (x_i),\\
&(x_i) \overset{(p)}{=} (y_l) \frown (y_l) \overset{(p)}{=} (x_i),\\
&(x_i) \overset{(p)}{=} (y_l) \;\&\; (y_l) \overset{(p)}{=} (z_m) \frown (x_i) \overset{(p)}{=} (z_m).
\end{aligned}$$

Aus $(x_i) \overset{(p)}{=} (y_l)$ folgt für jede symmetrische Funktion $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ von p Veränderlichen

$$\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sigma(y_1, y_2, \ldots, y_p).$$

Durch Auflösung eines Systems funktional unabhängiger symmetrischer Funktionen $\alpha_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) = u_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ erhält man immer ein p-tupel von p-wertig fixierten Argumenten x_i. Z. B. sind die Wurzeln einer algebraischen Gleichung p-ten Grades, deren Koeffizienten eindeutig bestimmt sind, p-wertig fixiert.

Nach diesen Vorbereitungen gelingt es leicht, die assoziativen Eigenschaften der Argumentfunktionen ψ_k in der Funktionalgleichung (0.2) zu beweisen. Wir legen zugrunde, daß die Argumentfunktionen $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ die Bedingungen (2.2′) bis (2.2‴) erfüllen, wobei wir (2.2″) im Sinne der Fußnote [3]) erweitern. Zusätzlich setzen wir voraus:

(4′) *$\exists$ p linear unabhängige analytische*[2]) *Lösungen $f_l(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, p)$, deren p Jacobische Umkehrfunktionen λ_i im Großen p-wertig fixiert sind.*

Durch Auflösung des Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{p} f_l[\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})] = \sum_{i=1}^{p+1} f_l(x_i), \; l = 1, 2, \ldots, p,$$

nach den Argumenten ψ_k erhält man gemäß Satz (3′)

$$(5) \qquad (\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})) \overset{(p)}{=} \left(\lambda_k \left\{\sum_{i=1}^{p+1} f_1(x_i), \sum_{i=1}^{p+1} f_2(x_i), \ldots, \sum_{i=1}^{p+1} f_p(x_i)\right\}\right).$$

Die Argumente $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ sind also symmetrische Funktionen in den $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$.

Mit der Abkürzung $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \doteq \psi_k$ folgt durch Iteration der Gleichheit (5) oder direkt durch Auflösung des Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{p} f_l[\psi_k\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p, x_{p+2}\}] = \sum_{i=1}^{p+2} f_l(x_i), \; l = 1, 2, \ldots, p,$$

$$(6) \qquad (\psi_k\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p, x_{p+2}\}) \overset{(p)}{=} \left(\lambda_k \left\{\sum_{i=1}^{p+2} f_1(x_i), \ldots, \sum_{i=1}^{p+2} f_p(x_i)\right\}\right).$$

Also ist auch jedes Element des p-tupels auf der linken Seite der Gleichheit (6) eine symmetrische Funktion in den $x_1, x_2, \ldots, x_{p+2}$, und es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}(7) \qquad & \psi_k\{\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}), \ldots, \psi_p(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}), x_{p+2}\} \\ &= \psi_k\{\psi_1(x_2, x_3, \ldots, x_{p+2}), \ldots, \psi_p(x_2, x_3, \ldots, x_{p+2}), x_1\} \\ &= \psi_k\{\psi_1(x_3, \ldots, x_{p+2}, x_1), \ldots, \psi_p(x_3, \ldots, x_{p+2}, x_1), x_2\} \\ &\doteq \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+2}), \; k = 1, 2, \ldots, p.\end{aligned}$$

Diese Symmetrieeigenschaft ist eine Verallgemeinerung der Assoziativitätsgleichung (1.2″). Eine assoziative Verknüpfung $\psi(x_1, x_2)$ zwischen komplexen Zahlen x_i einer Menge $\mathfrak{X}$ macht diese Menge zu einer assoziativen algebraischen Struktur, wenn für alle $x_1 \in \mathfrak{X}$, $x_2 \in \mathfrak{X}$ auch $\psi(x_1, x_2) \doteq x_1 \circ x_2 \in \mathfrak{X}$ ist. Entsprechend definieren die p Verknüpfungen

$$(8) \qquad \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \doteq \overset{k}{\circ}(x_1 x_2 \cdots x_{p+1}), \; k = 1, 2, \ldots, p,$$

von $p + 1$ komplexen Zahlen x_i einer Menge $\mathfrak{X}$ auf dieser Menge eine algebraische Struktur mit folgenden Eigenschaften:

(9′) *Zu $p + 1$ beliebig vorgegebenen Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ aus $\mathfrak{X}$ gibt es genau p verschiedene, simultane, p-wertig fixierte Verknüpfungen $\overset{k}{\circ}$ („k-Kreis"), $k = 1, 2, \ldots, p$, so daß alle „Produkte" $\overset{k}{\circ}(x_1 x_2 \cdots x_{p+1})$ wieder Elemente von $\mathfrak{X}$ sind.*

(9″) *p und weniger Elemente können nicht miteinander verknüpft werden.*

(9‴) *Die Verknüpfungen $\overset{k}{\circ}$ sind kommutativ, d. h. $\overset{k}{\circ}(x_1 x_2 \cdots x_{p+1})$ ist symmetrisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$.*

(9^{IV}) *Die Verknüpfungen* $\overset{k}{\circ}$ *sind assoziativ, d. h. die Ausdrücke*

$$\begin{aligned}\overset{k}{\circ}\{\overset{1}{\circ}(x_1x_2\cdots x_{p+1})\overset{2}{\circ}(x_1x_2\cdots x_{p+1})\cdots\overset{p}{\circ}(x_1x_2\cdots x_{p+1})\,x_{p+2}\}\\ =\overset{k}{\circ}\{x_1\overset{1}{\circ}(x_2x_3\cdots x_{p+2})\overset{2}{\circ}(x_2x_3\cdots x_{p+2})\cdots\overset{p}{\circ}(x_2x_3\cdots x_{p+2})\}\\ \doteq\overset{k}{\circ}(x_1x_2\cdots x_{p+2})\end{aligned}$$

sind symmetrisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{p+2}$ *für alle* $k = 1, 2, \ldots, p$ *und definieren zugleich die Produkte von* $p + 2$ *Elementen.*

Für diese Struktur führen wir eine Bezeichnung ein durch die Definition:

Ein kommutatives p-id ist eine kommutative und p-wertig assoziative algebraische Struktur mit den Eigenschaften (9′) *bis* (9^{IV}).

Diese Namensgebung nimmt Bezug auf Bourbaki [10], S. 7, Definition 4, wo für 1-wertige assoziative algebraische Strukturen die Bezeichnung „Monoïde" eingeführt wurde. Die als Eigenschaft (9‴) geforderte Kommutativität der Produkte $\overset{k}{\circ}(x_1x_2\cdots x_{p+1})$ bezieht sich auf die volle symmetrische Gruppe der Permutationen der x_i, d. h. $\overset{k}{\circ}(x_1x_2\cdots x_{p+1})$ ist invariant gegenüber sämtlichen Permutationen der symmetrischen Gruppe der $p + 1$ Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$.

Wenn zusätzlich die Existenz eines Einselementes e und zu jedem Element x die Existenz eines inversen Elementes x^{-1} gefordert wird, entsteht aus dem Monoïd eine Gruppe. Um Einselement und inverses Element auch für ein p-id sinnvoll einzuführen, lassen wir uns von der Funktionalgleichung leiten. Im Falle $p = 1$ ergab sich in § 1, daß das Einselement e der Verknüpfung $\psi(x_1, x_2) \doteq x_1 \circ x_2$ Nullstelle der zugeordneten Funktion $f(x)$ ist und das inverse Element $j(x)$ bezüglich dieser Verknüpfung die Relation (1.1‴) erfüllt. Wenn $p > 1$ ist, fordern wir

$$(4'')\qquad \exists\, e \in \mathfrak{X},\ f_l(e) = 0 \text{ für } l = 1, 2, \ldots, p.$$

Dann erhalten wir mit $x_{p+1} = e$ aus der Funktionalgleichung

$$\sum_{i=1}^{p} f_l(x_i) = \sum_{k=1}^{p} f_l[\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_p, e)],\ l = 1, 2, \ldots, p,$$

woraus durch Auflösung gemäß Satz (3′)

$$(10)\qquad (\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_p, e)) \overset{(p)}{=} (x_k)$$

folgt. Durch diese p Gleichungen wollen wir das Einselement definieren.

Die Aussage über die Nichtreduzierbarkeit einer Summe von p Funktionswerten auf weniger als p Funktionswerte (S. 126) legt es nahe, zu jedem Element die Existenz von p inversen Elementen $j_1(x), j_2(x), \ldots, j_p(x)$ zu fordern. Wir verallgemeinern also (1.1‴) durch

$$(4''')\qquad \forall\, x \in \mathfrak{X}\ \exists\, j_k(x)\ (k = 1, 2, \ldots, p),$$

$$f_l(x) + \sum_{k=1}^{p} f_l[j_k(x)] = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, p.$$

Tatsächlich würde aus der Annahme von nur $p' < p$ inversen Elementen $j_1(x), j_2(x), \ldots, j_{p'}(x)$ durch Umkehrung gemäß Satz (3′) folgen, daß die Gleichungen (4‴) nur für gewisse konstante Werte $\lambda_i(0, 0, \ldots, 0)$ möglich sind, wenn das Unabhängigkeitsmaß

$$(2')\qquad \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_{p'+1}) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ f'_{p'+1}(x_1) & \cdots & f'_{p'+1}(x_{p'+1}) \end{vmatrix}$$

an den Stellen $x_i = j_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p')$, $x_{p'+1} = x$ nicht verschwindet und die Voraussetzungen für Satz $(3')$ erfüllt sind.

Aus $(4''')$ folgen die Relationen

$$(11) \qquad \psi_k\{x, j_1(x), j_2(x), \ldots, j_p(x)\} = e \text{ für } k = 1, 2, \ldots, p.$$

Die p inversen Elemente $j_k(x)$ zu x sind p-wertig fixiert.

Es wird sinnvoll sein, die Eigenschaften $(9')$ bis (9^{IV}) durch die folgenden zu ergänzen:

(9^{V}) *Für alle p Verknüpfungen $\overset{k}{\circ}$ existiert ein gemeinsames Einselement e, so daß für beliebige Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_p$ aus $\mathfrak{X}$*

$$(\overset{k}{\circ}(x_1 x_2 \cdots x_p e)) \overset{(p)}{=} (x_k)$$

gilt.

(9^{VI}) *Zu jedem Element x aus $\mathfrak{X}$ existieren genau p p-wertig fixierte Elemente $\overset{k}{\ominus}(x)$ aus $\mathfrak{X}$, so daß für alle $k = 1, 2, \ldots, p$*

$$\overset{k}{\circ}\{x \overset{1}{\ominus}(x) \overset{2}{\ominus}(x) \cdots \overset{p}{\ominus}(x)\} = e$$

gilt.

Wir definieren:

Eine kommutative p-wertige Gruppe ist eine kommutative und p-wertig assoziative algebraische Struktur mit den Eigenschaften $(9')$ bis (9^{VI}).

Eine 1-wertige Gruppe ist demzufolge eine Gruppe im gewöhnlichen Sinne[5]). Wir wollen uns mit einigen elementaren Rechnungen in der soeben definierten Struktur vertraut machen. Aus der Eigenschaft (9^{IV}) liest man leicht ab, wie die Produkte von mehr als $p + 2$ Elementen rekursiv zu definieren sind:

$$(12) \qquad \begin{aligned} &\psi_k\{\psi_1(x_1, \ldots, x_{p+\nu-1}), \ldots, \psi_p(x_1, \ldots, x_{p+\nu-1}), x_{p+\nu}\} \\ &\quad \doteq \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+\nu}), \qquad \nu = 2, 3, \ldots, \end{aligned}$$

$$(12') \qquad \begin{aligned} &\overset{k}{\circ}\{\overset{1}{\circ}(x_1 \cdots x_{p+\nu-1}) \cdots \overset{p}{\circ}(x_1 \cdots x_{p+\nu-1})\, x_{p+\nu}\} \\ &\quad \doteq \overset{k}{\circ}(x_1 x_2 \cdots x_{p+\nu}). \end{aligned}$$

Man hat nur zu beachten, daß weniger als $p + 1$ Elemente nicht verknüpft werden können. Es folgt

$$(\overset{k}{\circ}(x_1 x_2 \cdots x_{p+\nu} e)) \overset{(p)}{=} (\overset{k}{\circ}(x_1 x_2 \cdots x_{p+\nu})) \text{ für } \nu \geqq 1.$$

Die Eigenschaft (9^{VI}) besagt, daß bei vorgegebenem x durch die p Gleichungen

$$\overset{k}{\circ}(x y_1 y_2 \cdots y_p) = e$$

die $y_1, y_2, \ldots, y_p$ p-wertig fixiert sind und $(y_i) \overset{(p)}{=} (\overset{i}{\ominus}(x))$ gilt. Daraus folgt, daß bei vorgegebenen x; $z_1, z_2, \ldots, z_p$ durch die p-wertige Gleichheit

$$(13) \qquad (\overset{k}{\circ}(x y_1 y_2 \cdots y_p)) \overset{(p)}{=} (z_k)$$

die $y_1, y_2, \ldots, y_p$ ebenfalls p-wertig fixiert sind. Zum Beweise berechnen wir mit Hilfe von (13) die Produkte

$$(13') \qquad (\overset{i}{\circ}(\overset{1}{\ominus}(x) \cdots \overset{p}{\ominus}(x)\, z_1 \cdots z_p)) \overset{(p)}{=} (y_i).$$

Die linke Seite ist p-wertig fixiert, also auch die rechte. Gleichzeitig geben die Formeln $(13')$ die Auflösung des Gleichungssystems (13) nach den y_i.

---

[5]) Das möge rechtfertigen, daß diese allgemeineren Strukturen unter Beibehaltung des Wortes „Gruppe" nur durch den Zusatz „p-wertig" von den eigentlichen Gruppen unterschieden werden.

Es ist zweckmäßig, abkürzende Bezeichnungen für die Ausdrücke

$$\psi_k\{j_1(x_1), \ldots, j_p(x_1), j_1(x_2), \ldots, j_p(x_2)\} \doteq j_k(x_1, x_2) \tag{14}$$

$$\overset{k}{\circ}\{\overset{1}{\ominus}(x_1) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_1) \overset{1}{\ominus}(x_2) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_2)\} \doteq \overset{k}{\ominus}(x_1 x_2) \tag{14'}$$

$$\psi_k\{j_1(x_1, \ldots, x_\nu), \ldots, j_p(x_1, \ldots, x_\nu), j_1(x_{\nu+1}), \ldots, j_p(x_{\nu+1})\} \doteq j_k(x_1, \ldots, x_\nu, x_{\nu+1}) \tag{15}$$

$$\overset{k}{\circ}\{\overset{1}{\ominus}(x_1 \cdots x_\nu) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_1 \cdots x_\nu) \overset{1}{\ominus}(x_{\nu+1}) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_{\nu+1})\} \doteq \overset{k}{\ominus}(x_1 x_2 \cdots x_\nu x_{\nu+1}) \tag{15'}$$

$$(\nu = 2, 3, \ldots)$$

einzuführen. Unter Benutzung von (12′), (9^{VI}) und (9^{V}) ergeben sich daraus die Relationen

$$\overset{k}{\circ}\{x_1 \cdots x_\nu \overset{1}{\ominus}(x_1 \cdots x_\nu) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_1 \cdots x_\nu)\} = e \tag{16}$$

für alle $k = 1, 2, \ldots, p$ und $\nu = 1, 2, \ldots$. Auch jetzt sind bei fest vorgegebenen $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ und $z_1, z_2, \ldots, z_p$ durch die Relationen

$$(\overset{k}{\circ}\{x_1 \cdots x_\nu y_1 \cdots y_p\}) \overset{(p)}{=} (z_k) \tag{17}$$

die $y_1, y_2, \ldots, y_p$ p-wertig fixiert. Zum Beweise bilden wir die Produkte

$$\begin{aligned}
&(\overset{i}{\circ}\{\overset{1}{\ominus}(x_1 \cdots x_\nu) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_1 \cdots x_\nu) z_1 z_2 \cdots z_p\}) \\
&\overset{(p)}{=} (\overset{i}{\circ}\{\overset{1}{\ominus}(x_1 \cdots x_\nu) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_1 \cdots x_\nu) x_1 \cdots x_\nu y_1 \cdots y_p\}) \\
&\overset{(p)}{=} (\overset{i}{\circ}\{e y_1 y_2 \cdots y_p\}) \overset{(p)}{=} (y_i).
\end{aligned}$$

Also gilt für jedes p-tupel (y_i), welches der p-wertigen Gleichheit (17) genügt,

$$(y_i) \overset{(p)}{=} (\overset{i}{\circ}\{\overset{1}{\ominus}(x_1 \cdots x_\nu) \cdots \overset{k}{\ominus}(x_1 \cdots x_\nu) z_1 z_2 \cdots z_p\}). \tag{17'}$$

Die rechte Seite ist p-wertig fixiert, also auch die linke, und die Formel (17′) liefert die Auflösung der Gleichheit (17) nach den y_i. Speziell folgt daraus für $z_1 = z_2 = \cdots = z_p = e$, daß das p-tupel

$$(y_i) \overset{(p)}{=} (\overset{i}{\ominus}(x_1 \cdots x_\nu))$$

die einzige Lösung des Gleichungssystems

$$\overset{k}{\circ}(x_1 \cdots x_\nu y_1 \cdots y_p) = e, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{16'}$$

bei fest vorgegebenen $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ist. Wählt man $\nu \geqq p + 1$, dann erhält man aus

$$\overset{k}{\circ}(x_1 \cdots x_\nu y_1 \cdots y_p) = \overset{k}{\circ}\{\overset{1}{\circ}(x_1 \cdots x_\nu) \cdots \overset{p}{\circ}(x_1 \cdots x_\nu) y_1 \cdots y_p\} = e$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

die Gleichheit

$$(y_i) \overset{(p)}{=} (\overset{i}{\ominus}(x_1 \cdots x_\nu)) \overset{(p)}{=} (\overset{i}{\ominus}\{\overset{1}{\circ}(x_1 \cdots x_\nu) \cdots \overset{p}{\circ}(x_1 \cdots x_\nu)\}). \tag{16''}$$

Aus den Gleichungen

$$\overset{k}{\circ}\{\overset{1}{\circ}(x_1 \cdots x_{p+\mu}) \cdots \overset{p}{\circ}(x_1 \cdots x_{p+\mu}) \overset{1}{\ominus}(x_1 \cdots x_{p+\mu}) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_1 \cdots x_{p+\mu})\} = e \tag{18}$$

$$(\mu > 0)$$

folgt durch Auflösung nach den ersten p Argumenten

$$(\overset{i}{\ominus}\{\overset{1}{\ominus}(x_1 \cdots x_{p+\mu}) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_1 \cdots x_{p+\mu})\}) \overset{(p)}{=} (\overset{i}{\circ}(x_1 \cdots x_{p+\mu})). \tag{19}$$

Für $\mu = 0$ erhält man entsprechend

$$(19') \qquad (\overset{i}{\ominus}\{\overset{1}{\ominus}(x_1 \cdots x_p) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_1 \cdots x_p)\}) \overset{(p)}{=} (x_i).$$

Diese Relation verallgemeinert die Gleichung $(x^{-1})^{-1} = x$ bei gewöhnlichen Gruppen.

Diese Hinweise mögen genügen, um dem Leser das Operieren in p-wertigen Gruppen nahezubringen.

Es sei noch ein Vergleich der p-wertigen Gruppen mit verwandten algebraischen Strukturen angestellt. In einer Arbeit von W. Dörnte [13] und einem ausführlichen Aufsatz von E. L. Post [29] wird der Gruppenbegriff dahingehend verallgemeinert, daß eine assoziative Verknüpfung zum Gegenstand der Untersuchung gemacht wird, welche nicht zwei, sondern erst $q > 2$ Elemente zu verknüpfen gestattet. E. L. Post nennt Strukturen mit einer solchen assoziativen Verknüpfung, in denen zusätzlich ein Einselement und ein inverses Element existieren (genaue Definition vgl. [29]), polyadische Gruppen (polyadic groups). Die polyadischen Gruppen unterscheiden sich von den p-wertigen Gruppen wesentlich dadurch, daß nur eine Verknüpfung an Stelle von p simultanen Verknüpfungen existiert. Daraus ergeben sich weitere Unterschiede in der Definition des Einselementes und der inversen Elemente.

Wir kehren nun wieder zu den uns interessierenden Funktionalgleichungen zurück und fassen die bisherigen Ergebnisse im folgenden Satz zusammen:

(20) *Wenn die p Funktionen* $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ *die Bedingungen* (2.2′) *bis* (2.2‴) *erfüllen, dann folgt aus den Voraussetzungen* (4′) *bis* (4‴), *daß die p Verknüpfungen* $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \doteq \overset{k}{\bigcirc}(x_1 x_2 \cdots x_{p+1})$ *den Definitionsbereich* $\mathfrak{X}$ *zu einer kommutativen p-wertigen Gruppe machen.*

Wir stellen die Frage: Ist dieser Satz auch umkehrbar? Folgt aus den assoziativen Bedingungen die Existenz nichttrivialer Lösungen? Wir werden diese Fragen bejahend beantworten können. Der Beweis dafür, daß die assoziativen Bedingungen im wesentlichen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind, läuft vollkommen analog zu dem Abelschen Beweis für $p = 1$ in § 1.

Wir setzen voraus, daß die p Funktionen $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$, $k = 1, 2, \ldots, p$, die Bedingungen (2.2′) bis (2.2‴) erfüllen und eine kommutative p-wertige Gruppe mit den Verknüpfungen $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \doteq \overset{k}{\bigcirc}(x_1 x_2 \cdots x_{p+1})$ definieren.

Der Beweis geht von den Assoziativitätsgleichungen

$$(7) \qquad \psi_k\{\psi_1(x_1, \ldots, x_{p+1}), \ldots, \psi_p(x_1, \ldots, x_{p+1}), x_{p+2}\} \doteq \psi_k(x_1, \ldots, x_{p+2})$$

aus. Wir gebrauchen die Abkürzungen

$$(21) \qquad \frac{\partial}{\partial x_l}\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+\nu}) \doteq \psi_{k,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+\nu}) \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots.$$

Wir differenzieren die Gleichungen (7) längs $\psi_k(x_1, \ldots, x_{p+1}) =$ konstant. Das leistet der Differentialoperator

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{p+1}} \\ \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \cdots & \psi_{1,p+1} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,1} & \cdots & \psi_{2,p+1} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \psi_{p,1} & \psi_{p,2} & \cdots & \psi_{p,p+1} \end{vmatrix} \doteq D_\psi \text{ mit } \psi_{p,l}(x_1, \ldots, x_{p+1}) \doteq \psi_{k,l}.$$

Durch Differentiation mit diesem Operator D_ν erhält man aus den Gleichungen (7) mit der Abkürzung

$$(22')\quad D_\nu x_l = (-1)^{l+1} \begin{vmatrix} \psi_{1,1} & \cdots & \psi_{1,l-1} & \psi_{1,l+1} & \cdots & \psi_{1,p+1} \\ \psi_{2,1} & \cdots & \psi_{2,l-1} & \psi_{2,l+1} & \cdots & \psi_{2,p+1} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \psi_{p,1} & \cdots & \psi_{p,l-1} & \psi_{p,l+1} & \cdots & \psi_{p,p+1} \end{vmatrix} \doteq D_{\nu,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$$

die Beziehungen

$$\sum_{l=1}^{p+1} \psi_{k,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+2})\, D_{\nu,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0,$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{p+2}$, für $k = 1, 2, \ldots, p$. Das ist ein homogenes lineares Gleichungssystem mit p Gleichungen für $p+1$ Größen $D_{\nu,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$, bzw. ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit p Gleichungen für die p Größen

$$\frac{D_{\nu,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})}{D_{\nu,p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})},$$

wenn wir annehmen, daß $D_{\nu,p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \neq 0$ ist. Wir definieren

$$D_{\nu,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+\nu}) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

ebenso wie $D_{\nu,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ (vgl. (22')), wobei $\psi_{k,l}(x_1, \ldots, x_{p+\nu}) \doteq \psi_{k,l}$ an Stelle von $\psi_{k,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ einzusetzen ist. Dann ist die Koeffizientendeterminante des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\sum_{l=1}^{p} \psi_{k,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+2}) \frac{D_{\nu,l}(x_1, \ldots, x_{p+1})}{D_{\nu,p+1}(x_1, \ldots, x_{p+1})} = -\psi_{k,p+1}(x_1, \ldots, x_{p+2})$$

gleich $(-1)^p D_{\nu,p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+2})$ und zumindest in einer Umgebung von $x_{p+2} = e$ von null verschieden, weil

$$D_{\nu,p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}, e) = D_{\nu,p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \neq 0$$

ist. Die Auflösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems ergibt

$$(23)\qquad \frac{D_{\nu,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})}{D_{\nu,p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})} = \frac{D_{\nu,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+2})}{D_{\nu,p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+2})},$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{p+2}$, für $l = 1, 2, \ldots, p$.

Wenn die Gleichungen

$$(12'')\qquad \begin{aligned} &\psi_k\{\psi_1(x_1, \ldots, x_{p+1}), \ldots, \psi_p(x_1, \ldots, x_{p+1}),\ x_{p+2}, \ldots, x_{2p+1}\} \\ &= \psi_k\{x_1, \ldots, x_p,\ \psi_1(x_{p+1}, \ldots, x_{2p+1}), \ldots, \psi_p(x_{p+1}, \ldots, x_{2p+1})\} \\ &\doteq \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1}) \end{aligned}$$

für $k = 1, 2, \ldots, p$ zugrunde gelegt werden, gelangt man zu

$$(23')\qquad \frac{D_{\nu,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})}{D_{\nu,p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})} = \frac{D_{\nu,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1})}{D_{\nu,p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1})},$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1}$, für $l = 1, 2, \ldots, p$.

Aus dem zweiten Teil der Gleichung (12'') folgt mit

$$\psi_l(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{2p+1}) \doteq \psi_l$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_{p+1}} \psi_l(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{2p+1}) \doteq \psi_{l,1}$$

die Gleichung

$$\psi_{k,p+1}(x_1, \ldots, x_{p+1}, \ldots, x_{2p+1}) = \sum_{l=1}^{p} \psi_{k,\psi_l}\{x_1, \ldots, x_p, \psi_1, \ldots, \psi_p\}\, \psi_{l,1}.$$

Das setzen wir in $D_{\psi,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1})$ ein und erhalten

$$D_{\psi,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1}) = \sum_{k=1}^{p} D_{\psi,l}\{x_1, \ldots, x_p, \psi_k, \ldots, \psi_p, \psi_1, \ldots, \psi_{k-1}\}\, \psi_{k,1}$$

für $l = 1, 2, \ldots, p$, während

$$D_{\psi,p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1}) = D_{\psi,p+1}\{x_1, \ldots, x_p, \psi_1, \ldots, \psi_p\}$$

gilt. Aus Gleichung (23) resultiert, daß man in den Quotienten

$$\frac{D_{\psi,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+\nu})}{D_{\psi,p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+\nu})} \qquad (\nu > 1)$$

diejenigen Argumente weglassen darf, nach welchen nicht differenziert wird:

$$\frac{D_{\psi,l}\{x_1, \ldots, x_p, \psi_k, \ldots, \psi_p, \psi_1, \ldots, \psi_{k-1}\}}{D_{\psi,p+1}\{x_1, \ldots, x_p, \psi_k, \ldots, \psi_p, \psi_1, \ldots, \psi_{k-1}\}} = \frac{D_{\psi,l}(x_1, \ldots, x_p, \psi_k)}{D_{\psi,p+1}(x_1, \ldots, x_p, \psi_k)}.$$

Also erhält man insgesamt aus (23′)

$$\frac{D_{\psi,l}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})}{D_{\psi,p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})} = \sum_{k=1}^{p} \frac{D_{\psi,l}\{x_1, \ldots, x_p, \psi_k(x_{p+1}, \ldots, x_{2p+1})\}}{D_{\psi,p+1}\{x_1, \ldots, x_p, \psi_k(x_{p+1}, \ldots, x_{2p+1})\}}\, \psi_{k,1}(x_{p+1}, \ldots, x_{2p+1}),$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1}$, für $l = 1, 2, \ldots, p$. Nun wählen wir $x_i = c_i =$ konstant für $i = 1, 2, \ldots, p$, so daß $D_{\psi,p+1}(c_1, \ldots, c_p, x) \neq 0$ ist, und setzen

$$\int_e^x dt\, \frac{D_{\psi,l}(c_1, c_2, \ldots, c_p, t)}{D_{\psi,p+1}(c_1, c_2, \ldots, c_p, t)} \doteq f_l(x). \tag{24}$$

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{p} f_l'[\psi_k(x_{p+1}, \ldots, x_{2p+1})]\, \psi_{k,1}(x_{p+1}, \ldots, x_{2p+1}) = f_l'(x_{p+1}),$$

identisch in $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{2p+1}$, für $l = 1, 2, \ldots, p$. Durch Integration bezüglich x_{p+1} folgt daraus

$$\sum_{k=1}^{p} f_l[\psi_k(x_{p+1}, \ldots, x_{2p+1})] = f_l(x_{p+1}) + \alpha_l(x_{p+2}, \ldots, x_{2p+1}).$$

Mit $x_{p+1} = e$ ergibt sich schließlich auf Grund von Gleichung (10)

$$\alpha_l(x_{p+2}, \ldots, x_{2p+1}) = \sum_{k=2}^{p+1} f_l(x_{p+k}),$$

also

$$\sum_{k=1}^{p} f_l[\psi_k(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{2p+1})] = \sum_{k=1}^{p+1} f_l(x_{p+k}),$$

identisch in $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{2p+1}$, für $l = 1, 2, \ldots, p$.

Wir erhalten also folgenden Satz:

(25) *Wenn die p Funktionen $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ die Bedingungen (2.2′) bis (2.2‴) erfüllen und wenn die durch diese Funktionen definierten Verknüpfungen den Definitionsbereich $\mathfrak{X}$ zu einer kommutativen p-wertigen Gruppe machen, dann sind die Funktionen*

$$f_l(x) = \int_e^x dt\, \frac{D_{\psi,l}(c_1, c_2, \ldots, c_p, t)}{D_{\psi,p+1}(c_1, c_2, \ldots, c_p, t)}, \quad l = 1, 2, \ldots, p,$$

analytische[2]) *Lösungen der Funktionalgleichung* (0.2), *welche den Bedingungen* (4″) *und* (4‴) *genügen.*

Wenn darüber hinaus p konstante Werte $c_1, c_2, \ldots, c_p$ existieren, so daß in einem gewissen $2p$- (bzw. p-)dimensionalen Gebiet im Raum der unabhängigen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_p$ die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{D_{\nu,1}}{D_{\nu,p+1}}(c_1, \ldots, c_p, y_1) & \cdots & \frac{D_{\nu,p}}{D_{\nu,p+1}}(c_1, \ldots, c_p, y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{D_{\nu,1}}{D_{\nu,p+1}}(c_1, \ldots, c_p, y_p) & \cdots & \frac{D_{\nu,p}}{D_{\nu,p+1}}(c_1, \ldots, c_p, y_p) \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, dann sind die Lösungen $f_l(x)$ (wie auch ihre Ableitungen $f_l'(x)$) linear unabhängig und ihre Jacobischen Umkehrfunktionen im Kleinen p-wertig fixiert.

Wir wollen diesen Paragraphen abschließen mit einem trivialen Beispiel für eine Funktionalgleichung der Form (0.2) mit dem Lösungssystem $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2$. Mit Hilfe der zugehörigen Jacobischen Umkehrfunktionen

$$\lambda_{1/2}(u_1, u_2) = \tfrac{1}{2}(u_1 \pm \sqrt{2u_2 - u_1})$$

gewinnt man die Darstellungen

$$\psi_{1/2}(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{1}{2}\{x_1 + x_2 + x_3 \pm \sqrt{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3)^2}\}$$

und weiter

$$(\psi_k(x_1, x_2, 0)) \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$j_{1/2}(x) = \frac{x}{2}(-1 \pm \sqrt{-3}).$$

II. Zyklische Strukturen.

§ 5. Der Pentagrammazyklus und die Funktionalgleichung zweiter Stufe für den Eulerschen Dilogarithmus.

Wir wenden uns nun den zyklischen Eigenschaften zu.

Die Funktionalgleichung (0.3) wurde zuerst von N. H. Abel [4] in der Form

$$(1) \qquad \psi(x) + \psi(y) + \psi\left(\frac{xy}{(1-x)(1-y)}\right) - \psi\left(\frac{x}{1-y}\right) - \psi\left(\frac{y}{1-x}\right) = -\log(1-x)\log(1-y)$$

für die Funktion

$$(2) \qquad \int_0^x dt\, \frac{\log(1-t)}{t} \doteq \psi(x),$$

$$\psi(x) = -\tfrac{1}{2}L(x) - \tfrac{1}{2}\log x \log(1-x) + \psi(\omega) + \tfrac{1}{2}\log\omega\log(1-\omega)$$

abgeleitet. Wenn man die auf L. Euler [15] zurückgehende Funktionalgleichung erster Stufe

$$(3) \qquad \psi(x) + \psi(1-x) = -\log x \log(1-x) + \frac{\pi^2}{6}$$

dazu benutzt, um in Gleichung (1) bei allen Gliedern dasselbe Vorzeichen zu erzeugen, erhält man

$$(4) \qquad \sum_{\nu=1}^{5}\left[\psi(y_\nu) + \frac{1}{2}\log y_\nu \log(1-y_\nu)\right] = \text{konstant}$$

mit

$$(4') \qquad y_{\nu+2} = 1 - \frac{y_{\nu+1}}{1 - y_\nu} \qquad (\nu \bmod 5),$$

$$y_1, y_2, y_3 = 1 - \frac{y_2}{1 - y_1}, \; y_4 = \frac{y_1 y_2}{(1 - y_1)(1 - y_2)}, \; y_5 = 1 - \frac{y_1}{1 - y_2}, \; y_6 = y_1, \ldots.$$

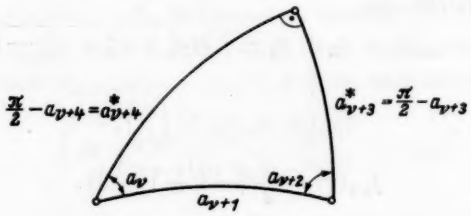
Die fünf Argumente bilden also wieder einen Zyklus, der mit dem Rogersschen äquivalent ist. Man erhält nämlich den Zyklus (4′) aus dem Zyklus (0.3″) durch Anwendung der linear gebrochenen Transformationen

$$\frac{y-1}{y} \doteq l(y), \quad \frac{1}{1-x} \doteq l^{-1}(x)$$

gemäß

$$l^{-1}\left[\varphi\{l(y_\nu), l(y_{\nu+1})\}\right] = 1 - \frac{y_{\nu+1}}{1 - y_\nu}.$$

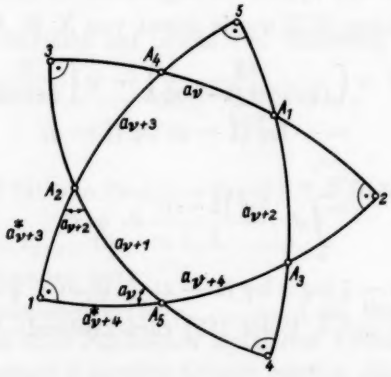
Bezeichnet man die Seiten und Winkel eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks wie in untenstehender Figur, indem man insbesondere jede Kathete a^* durch ihr Komplement $a = \frac{\pi}{2} - a^*$ ersetzt,



so schreibt sich bekanntlich die Napiersche Regel mit ν mod 5 in der Form

$$(5) \qquad \cos a_\nu = \operatorname{ctg} a_{\nu-1} \operatorname{ctg} a_{\nu+1} \text{ bzw. } \cos a_\nu = \sin a_{\nu-2} \sin a_{\nu+2}.$$

Sie findet ihre Begründung nach J. Napier [26] durch den Einbau des rechtwinkligen Dreiecks in die sich schließende Figur des Pentagramma Mirificum auf der Kugeloberfläche.



Man denke sich etwa diese schematische Figur in der Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5, 1 durchlaufen. Sie ist vollständig bestimmt, wenn man zwei aufeinanderfolgende Bögen beliebig zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π vorgibt. Dann erhält man bei Fortsetzung der Figur mit ν mod 5

$$\overline{A_\nu(\nu+2)} = \overline{A_\nu(\nu-2)} = \overline{A_\nu A_{\nu+1}} = \frac{\pi}{2}.$$

Man kann die Relationen (5) rational machen, indem man die Quadrate einer trigonometrischen Funktion der a_ν als neue Argumente einführt (C. F. Gauß [17]) und gewinnt z. B. aus der ersten Relation

$$x_{\nu+1} = \frac{1 - x_{\nu-1}}{1 - x_\nu x_{\nu-1}} \quad \text{mit } \sin^2 a_\nu \doteq x_\nu$$

und

$$y_{\nu+1} = 1 - \frac{y_\nu}{1 - y_{\nu-1}} \quad \text{mit } \frac{1}{\cos^2 a_\nu} \doteq y_\nu,$$

also genau die Zyklen (0.3″) und (4′).

Durch Anwendung einer beliebigen linear gebrochenen Transformation

$$\frac{ay + b}{cy + d} \doteq l(y), \quad \frac{-dx + b}{cx - a} \doteq l^{-1}(x); \quad ad - bc \neq 0, \tag{6}$$

erhält man aus (0.3″) eine dreiparametrige Mannigfaltigkeit von Relationen

$$l^{-1}[\varphi\{l(y_\nu), l(y_{\nu+1})\}] \doteq \varphi_l(y_\nu, y_{\nu+1}) = y_{\nu+2}, \tag{7}$$

welche wieder Fünferzyklen erzeugen:

$$\begin{aligned}
&y_1, y_2,\\
&y_3 = \varphi_l(y_1, y_2),\\
&y_4 = \varphi_l[y_2, \varphi_l(y_1, y_2)],\\
&y_5 = \varphi_l\{\varphi_l(y_1, y_2), \varphi_l[y_2, \varphi_l(y_1, y_2)]\},\\
&y_6 = \varphi_l\langle\varphi_l[y_2, \varphi_l(y_1, y_2)], \varphi_l\{\varphi_l(y_1, y_2), \varphi_l[y_2, \varphi_l(y_1, y_2)]\}\rangle = y_1.
\end{aligned}$$

Die zugeordnete lineare Funktionalgleichung

$$\sum_{\nu=1}^{5} f(y_\nu) = 0 \tag{8}$$

wird von der Funktion

$$f(y) = L\left[\frac{ay + b}{cy + d}\right] \tag{8'}$$

erfüllt.

Für spezielle linear gebrochene Transformationen ist $L\left[\frac{ay + b}{cy + d}\right]$ mit $L(y)$ vergleichbar Nach L. Euler [15] gelten nämlich folgende Funktionalgleichungen erster Stufe für den Dilogarithmus

$$L(x) + L(1 - x) = L\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \tag{9}$$

$$L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) = -\pi i \log_0 x + \pi i \log_0 \omega + L\left(\frac{1}{\omega}\right), \tag{10}$$

wobei $\log_0 x$ den Hauptwert des Logarithmus bezeichnet, welcher bei $x = \omega = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ reell ist. Die linear gebrochenen Transformationen $1 - y \doteq l_1(y)$ und $\frac{1}{y} \doteq l_2(y)$ erzeugen eine Sechsergruppe linear gebrochener Transformationen $\mathfrak{L}_6$ mit den Elementen

$$l_0(y) = y, \; l_1(y) = 1 - y, \; l_2(y) = \frac{1}{y},$$

$$l_1 l_2(y) = \frac{y - 1}{y}, \; l_2 l_1(y) = \frac{1}{1 - y}, \; l_1 l_2 l_1(y) = \frac{y}{y - 1}.$$

Wendet man eine dieser Transformationen auf den Zyklus (0.3″) und die zugehörige Funktionalgleichung (0.3) an, dann erhält man nach der Transformation eine Funktional-

gleichung, welche, abgesehen von logarithmischen und konstanten Termen, wieder vom Dilogarithmus gelöst wird. Es gibt also sechs äquivalente Formen der Funktionalgleichung zweiter Stufe für den Dilogarithmus. Die sechs zugehörigen Quintupel von Argumenten bilden ein gegenüber $\mathfrak{L}_6$ abgeschlossenes System, dergestalt daß bei Anwendung einer Transformation aus $\mathfrak{L}_6$ diese sechs Quintupel nur unter sich permutiert werden. Durch Anwendung sämtlicher Transformationen aus $\mathfrak{L}_6$ erhält man aus einem beliebigen dieser Quintupel alle übrigen. Es ergibt sich folgende Tabelle für die Argumentquintupel:

$$\mathfrak{z}_1:\ x_{\nu+2} = \frac{1-x_\nu}{1-x_\nu x_{\nu+1}};$$

$$x_1, x_2, \frac{1-x_1}{1-x_1x_2},\ 1-x_1x_2,\ \frac{1-x_2}{1-x_1x_2}, \ldots \qquad \text{(Rogers)};$$

$$\mathfrak{z}_2:\ x_{\nu+2} = \frac{1-x_{\nu+1}}{x_\nu};$$

$$x_1, x_2, \frac{1-x_2}{x_1},\ \frac{x_1+x_2-1}{x_1x_2},\ \frac{1-x_1}{x_2}, \ldots \qquad \text{(Gauß)};$$

$$\mathfrak{z}_3:\ x_{\nu+2} = 1-\frac{x_{\nu+1}}{1-x_\nu};$$

$$x_1, x_2, 1-\frac{x_2}{1-x_1},\ \frac{x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)},\ 1-\frac{x_1}{1-x_2}, \ldots \qquad \text{(Abel)};$$

$$\mathfrak{z}_4:\ x_{\nu+2} = \frac{x_{\nu+1}(1-x_\nu)}{x_\nu+x_{\nu+1}-x_\nu x_{\nu+1}};$$

$$x_1, x_2, \frac{x_2(1-x_1)}{x_1+x_2-x_1x_2},\ (1-x_1)(1-x_2),\ \frac{x_1(1-x_2)}{x_1+x_2-x_1x_2}, \ldots;$$

$$\mathfrak{z}_5:\ x_{\nu+2} = \frac{1-x_\nu x_{\nu+1}}{x_{\nu+1}(1-x_\nu)};$$

$$x_1, x_2, \frac{1-x_1x_2}{x_2(1-x_1)},\ \frac{x_1x_2}{x_1x_2-1},\ \frac{x_1x_2-1}{x_1(1-x_2)}, \ldots;$$

$$\mathfrak{z}_6:\ x_{\nu+2} = \frac{x_{\nu+1}}{x_\nu(x_{\nu+1}-1)};$$

$$x_1, x_2, \frac{x_2}{x_1(x_2-1)},\ \frac{1}{x_1+x_2-x_1x_2},\ \frac{x_1}{x_2(x_1-1)}, \ldots.$$

Die Zyklen $\mathfrak{z}_2$ bis $\mathfrak{z}_6$ werden durch folgende Transformationen aus $\mathfrak{z}_1$ gewonnen:

$$\mathfrak{z}_2 = l_1l_2l_1(\mathfrak{z}_1),\ \mathfrak{z}_3 = l_2l_1(\mathfrak{z}_1),\ \mathfrak{z}_4 = l_1(\mathfrak{z}_1),\ \mathfrak{z}_5 = l_2(\mathfrak{z}_1),\ \mathfrak{z}_6 = l_1l_2(\mathfrak{z}_1).$$

Je zwei dieser Zyklen ($\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3$ und $\mathfrak{z}_4$, $\mathfrak{z}_5$ und $\mathfrak{z}_6$) hängen so miteinander zusammen, daß die Argumente des einen Zyklus sich ergeben, wenn man in der natürlichen Anordnung der Argumente des anderen Zyklus immer ein Argument überspringt und die Abhängigkeit zwischen je drei im Abstand zwei aufeinanderfolgenden Argumenten der Kette berechnet. Das erklärt sich daraus, daß diese Fünferzyklen auf genau zwei verschiedene Weisen durchlaufen werden können, wie die folgende Figur veranschaulicht.

Es soll in diesem Paragraphen noch die allgemeine analytische (bzw. dreimal stetig differenzierbare) Lösung einer der sechs gleichberechtigten Funktionalgleichungen zweiter Stufe konstruiert werden. Wir greifen willkürlich den Zyklus $\mathfrak{z}_1$ und die ihm zugeordnete Funktionalgleichung

$$(0.3)\qquad f(x) + f(y) + f\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + f(1-xy) + f\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) = 0,$$

identisch in x, y, heraus. Durch Anwendung des Abelschen Lösungsverfahrens (vgl [1]) werden wir die Lösung dieser Funktionalgleichung auf die Lösung einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zurückführen. Wir gebrauchen die Abkürzungen

$$\frac{1-x}{1-xy} \doteq u,\ 1-xy \doteq v,\ \frac{1-y}{1-xy} \doteq w.$$

Wir differenzieren die Gleichung (0.3) partiell nach x und erhalten

$$f'(x) + f'(u)\, u_x + f'(v)\, v_x + f'(w)\, w_x = 0,$$

identisch in x, y, wobei die u_x, v_x, w_x die partiellen Ableitungen dieser Funktionen nach x bezeichnen. Wir ersetzen x, y, u durch v, w. Dann ergibt sich

$$(11)\qquad \frac{v}{1-vw} f'\left(\frac{1-v}{1-vw}\right) - \frac{w}{1-vw} f'\left(\frac{1-w}{1-vw}\right) = vf'(v) - wf'(w),$$

identisch in v, w.

Hieraus schließt man: Wenn $f'(0) = c_0$ und $f'(1) = c_1$ existieren und beide endlich sind, dann gilt mit $v = 1$

$$(12)\qquad f'(w) = \frac{c_1 - c_0}{w(1-w)}.$$

Das liefert aber nur dann eine Lösung, wenn $c_1 - c_0 = 0$ ist. Die Funktionalgleichung (0.3) besitzt also, wenn überhaupt, dann nur solche differenzierbaren Lösungen, deren Ableitungen in den Punkten 0 oder 1 singulär werden.

Um alle diese Lösungen zu erhalten, werden wir noch zweimal partiell differenzieren und mit jeder Differentiation eines von den vier Gliedern in Gleichung (11) vernichten. Dann gelangen wir zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung, deren sämtliche Lösungen wir bestimmen können.

Wir differenzieren zunächst die Gleichung (11) partiell nach v und ersetzen anschließend w zugunsten von u. Das ergibt

$$(12)\qquad \begin{aligned}(1-u)^2[f'(u) + uf''(u)] + (1-v)^2[f'(v) + vf''(v)]\\ = (1-uv)^2[f'(1-uv) - uvf''(1-uv)],\end{aligned}$$

identisch in u, v. Nun eliminieren wir die reinen v-Glieder, indem wir partiell nach u differenzieren:

$$\begin{aligned}(1-u)[-2f'(u) + 2(1-2u)f''(u) + u(1-u)f'''(u)]\\ = (1-uv)\,v[-2f'(1-uv) + 2(2uv-1)f''(1-uv)\\ + uv(1-uv)f'''(1-uv)].\end{aligned}$$

Mit $v = \dfrac{1-x}{u}$ entsteht

$$(13)\qquad \begin{aligned}u(1-u)[-2f'(u) + 2(1-2u)f''(u) + u(1-u)f'''(u)]\\ = x(1-x)[-2f'(x) + 2(1-2x)f''(x) + x(1-x)f'''(x)],\end{aligned}$$

identisch in x, u. Aus Gleichung (13) folgt aber, daß sowohl die linke als auch die rechte Seite dieser Gleichung konstant sein muß. Für diese Konstante können wir die beiden Werte 0 oder 1 annehmen. Also gilt für jede analytische (bzw. dreimal stetig differenzierbare) Lösung der Funktionalgleichung (0.3), welche geeignet normiert ist,

$$(14) \qquad f'''(x) + 2\frac{1-2x}{x(1-x)}f''(x) - \frac{2}{x(1-x)}f'(x) = \frac{1}{x^2(1-x)^2}$$

oder

$$(14') \qquad f'''(x) + 2\frac{1-2x}{x(1-x)}f''(x) - \frac{2}{x(1-x)}f'(x) = 0.$$

Die Differentialgleichungen (14) und (14′) wurden auseinandergenommen, um deutlich zu machen, daß auch eine Funktion $f(x)$, welche nur die homogene Differentialgleichung löst, Lösung der Funktionalgleichung (0.3) sein kann.

Wir bestimmen die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen (14) und (14′). Sie setzt sich additiv zusammen aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (14) und der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung (14′).

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (14) ist

$$(15) \qquad L'(x) = \frac{\log(1-x)}{x} + \frac{\log x}{1-x},$$

und die allgemeine Lösung $f_h'(x)$ der Gleichung (14′) ist eine Linearkombination der beiden linear unabhängigen Lösungen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{1-x}$

$$(15') \qquad f_h'(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x} \quad (a, b \text{ Konstanten}).$$

Die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung (0.3) ist also enthalten in

$$(16') \qquad f(x) = c_1 L(x) + c_2 \log\frac{x^a}{(1-x)^b} + c_0.$$

Es muß noch nachgeprüft werden, welche der in Gleichung (16′) enthaltenen Funktionen die Funktionalgleichung (0.3) auch wirklich lösen. Zunächst ist klar, daß man die Lösungen der Funktionalgleichung (0.3) addieren und mit einem konstanten Faktor multiplizieren kann, ohne daß die Eigenschaft, Lösung zu sein, verloren geht. Wenn wir die Fixierung einer Integrationskonstanten für den Augenblick noch zurückstellen, dann ist $L(x)$ bis auf eine Konstante Lösung der Funktionalgleichung (0.3), wie man durch Einsetzen bestätigt.

Für $\log x$ und $\log(1-x)$ erhalten wir mit $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = u$, $x_4 = v$ und $x_5 = w$

$$\sum_{\nu=1}^{5} \log x_\nu = \log\left(\frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}\right)$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{5} \log(1-x_\nu) = \log\left(\frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}\right)^2.$$

$\log\frac{x^a}{(1-x)^b}$ ist also nur dann Lösung der Funktionalgleichung (0.3), wenn $a = 2b$ ist.

Wir gehen nun an die Bestimmung der Integrationskonstanten ω in

$$(17) \qquad L(x) = \int_\omega^x dt\left[\frac{\log(1-t)}{t} + \frac{\log t}{1-t}\right].$$

Aus der Funktionalgleichung (0.3) erhält man zwei ausgezeichnete Punkte $\omega_{1,2}$ durch die Forderung $x = y = \dfrac{1-x}{1-xy}$:

$$\omega = \frac{1-\omega}{1-\omega^2} \frown \omega^2 + \omega - 1 = 0 \frown \omega = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Diese Punkte sind Fixpunkte des Zyklus $\mathfrak{z}_1$. Für jede Lösung $f(x)$ der Funktionalgleichung (0.3) gilt $f(\omega) = 0$. Dadurch ist also die Integrationskonstante festgelegt. Wir wählen $\omega = \omega_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ und erhalten das Ergebnis:

Jede analytische (bzw. dreimal stetig differenzierbare) Lösung der Funktionalgleichung (0.3) *gestattet die Darstellung*

$$(16) \quad f(x) = c_1 \int_{\omega_1}^{x} dt \left[\frac{\log_0(1-t)}{t} + \frac{\log_0 t}{1-t}\right] + c_2 \int_{\omega_1}^{x} dt \left[\frac{2}{t} + \frac{1}{1-t}\right],$$

wobei c_1 und c_2 Konstanten und $\log_0(t)$ den Hauptwert des Logarithmus, welcher für $t = \omega_1$ negativ ist, bezeichnen.

Es muß noch erläutert werden, wie die Funktionswerte der unendlich vieldeutigen Lösungen (16) in der Funktionalgleichung fixiert werden müssen, damit man sinnvoll von einer Gleichung sprechen kann. Diese Fragestellung berührt das allgemeine Problem, wie denn eine Funktionalgleichung (mit komplexen Veränderlichen) gedeutet werden muß, deren Lösungen mehrdeutige Funktionen sind.

Zur Vorbereitung betrachten wir das einfache Beispiel der Funktionalgleichung für den Logarithmus

$$(18) \qquad f(x) + f(y) + f\left(\frac{1}{xy}\right) = 0$$

mit der allgemeinen Lösung $f(x) = c \log x$. Durch die Funktionalgleichung (18) ist der Wert der Lösungsfunktion zunächst im Punkt 1 $(f(1) = 0)$ und auch in einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}(1)$ des Punktes 1 eindeutig festgelegt. Von dieser Umgebung $\mathfrak{U}(1)$ aus denke man sich die Funktionalgleichung (18) analytisch fortgesetzt. Dabei betrachtet man zweckmäßig die Argumente x, y und $\dfrac{1}{xy}$ als Argumente, welche sich in der Riemannschen Fläche der Lösungsfunktion $f(x)$ bewegen. Hält man also z. B. y fest und macht mit x längs des Einheitskreises einen vollen positiven Umlauf von $+1$ ausgehend nach $+1$ zurück, dann kommt man mit dem Argument x vom Hauptblatt der logarithmischen Fläche in das darüberliegende Blatt. Gleichzeitig wandert dabei das Argument $\dfrac{1}{xy}$ von $\dfrac{1}{y}$ längs des Kreises mit dem Radius $\dfrac{1}{|y|}$ im negativen Drehsinn um den Nullpunkt herum nach $\dfrac{1}{y}$ zurück und landet in dem darunterliegenden Blatt der logarithmischen Fläche. Die additiven Zusätze, welche bei diesen Umläufen von den Gliedern $f(x)$ und $f\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ erzeugt werden, heben sich auf. Die Funktionalgleichung behält also ihre Gültigkeit. Durch solche Umläufe mit den beiden unabhängigen Argumenten x oder y gelangt man aber mit x und y in jedes Blatt der logarithmischen Fläche, und die Funktionalgleichung (18) wird dabei immer erfüllt.

Durch das Prinzip der analytischen Fortsetzung läßt sich also die Funktionalgleichung (18), ausgehend von einer kleinen Umgebung $\mathfrak{U}(1)$, in die volle Riemannsche

Fläche der Lösungsfunktion übertragen, und die Funktionswerte lassen sich dadurch eindeutig bestimmen, daß man die Argumente in die Riemannsche Fläche legt und längs Wegen auf der Riemannschen Fläche verfolgt.

In derselben Weise hat man sich auch das Erfülltsein der Funktionalgleichung (0.3) durch die Lösungen (16) vorzustellen. Man geht aus von einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes $\omega_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ und nennt etwa das Blatt, in welchem die Funktionswerte an der Stelle ω_1 verschwinden, das Hauptblatt. Dann setzt man, ausgehend von dem Funktionswert an der Stelle ω_1, analytisch fort und gelangt so zu beliebigen Argumenten auf der Riemannschen Fläche der Lösungsfunktion, wenn man alle Argumente als Veränderliche auf der Riemannschen Fläche betrachtet. Die Funktionswerte sind in Abhängigkeit von diesen Argumenten auf der Riemannschen Fläche eindeutig bestimmt und stellen genau die Werte dar, welche die Funktionalgleichung befriedigen.

Über die analytische Fortsetzung einer Funktionalgleichung vergleiche man die Darstellung von W. F. Osgood [27], Kap. 9, § 6, Permanenz einer Funktionalgleichung, analytische Fortsetzung vermöge derselben, S. 450 u. ff.

§ 6. Definition der zyklischen Umsetzung s-ter Stufe.

In Verallgemeinerung des z. B. durch die Relation (0.3″) definierten Pentagrammazyklus betrachten wir Funktionen $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ von s Veränderlichen. Jedes der unabhängigen Argumente $x_1, x_2, \ldots, x_s$ soll in demselben zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{X}$ der komplexen Zahlenebene stetig veränderlich sein. $\mathfrak{X}^{(s)}$ sei das Gebiet des $2s$-dimensionalen komplexen Raumes, das aus allen Punkten $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ besteht, deren sämtliche Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_s$ in $\mathfrak{X}$ liegen (s-faches kartesisches Produkt). Dann soll $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ als Funktion von s Veränderlichen in $\mathfrak{X}^{(s)}$ existieren, die Funktionswerte $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s) = x_{s+1}$ sollen in $\mathfrak{X}$ liegen und jeden Wert in $\mathfrak{X}$ annehmen und $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ soll in $\mathfrak{X}^{(s)}$ eindeutig und sogar analytisch sein.

Wir werden Veranlassung haben, auch solche Funktionen in Betracht zu ziehen, welche von Haus aus nicht eindeutig sind, sich aber durch geeignete Festsetzungen (Zweigfixierungen) eindeutig machen lassen. Z. B. ist die Funktion

$$(1) \qquad -x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \doteq \varphi(x, y)$$

von Haus aus nicht eindeutig, sie ist aber eindeutig auf der zweiblättrigen Riemannschen Fläche mit Windungspunkten erster Ordnung in ± 1. Wir werden also unsere Voraussetzungen über $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ dahingehend abändern, daß wir nur fordern, daß $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ eine eindeutige analytische Funktion von mehreren Veränderlichen über einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ ist. Insbesondere seien die Fälle, daß $\mathfrak{X}$ die schlichte Zahlenebene oder ein Bereich derselben ist, darin eingeschlossen.

Einem Punkt P auf $\mathfrak{X}$ kommen also zwei Bestimmungsstücke zu: 1) die komplexe Koordinate seines Spurpunktes in der Zahlenebene und 2) die Blattzahl, die angibt, in welchem Blatt über dem Spurpunkt P liegt. Wenn wir in unserem speziellen Falle die beiden Blätter durch einen Vorzeichenfaktor $\varepsilon = \pm 1$ unterscheiden, dann schreibt sich die Funktion (1) als eindeutige Funktion über der zweiblättrigen Fläche in der Form

$$(2) \qquad z = -x\varepsilon_y\sqrt{1-y^2} - y\varepsilon_x\sqrt{1-x^2},$$

wobei $\sqrt{x}$ immer den positiven Zweig bezeichnet, der bei $x = 1$ den Wert $+1$ hat. ε_x ist die Blattzahl von x. Die Funktion (2) ordnet jedem Punktepaar $P_1\binom{x}{\varepsilon_x}$, $P_2\binom{y}{\varepsilon_y}$

eindeutig einen Wert z zu. Um später auch $\varphi[y, \varphi(x, y)]$ eindeutig bilden zu können, müssen wir weiter voraussetzen, daß nicht nur z eindeutig fixiert ist, sondern auch die Blattzahl ε_z von z auf $\mathfrak{X}$ als Funktion von $x, \varepsilon_x; y, \varepsilon_y$. In unserem Beispiel ist

$$\begin{aligned}\varepsilon_z \sqrt{1-z^2} &= \pm \sqrt{[\pm(\varepsilon_x \sqrt{1-x^2}\,\varepsilon_y \sqrt{1-y^2} - xy)]^2} \\ &= \pm(\varepsilon_x \sqrt{1-x^2}\,\varepsilon_y \sqrt{1-y^2} - xy).\end{aligned}$$

Man kann sich auf eines dieser beiden Vorzeichen festlegen, also etwa auf das (+)-Zeichen und erhält

$$\varepsilon_z \sqrt{1-z^2} = +(\varepsilon_x \sqrt{1-x^2}\,\varepsilon_y \sqrt{1-y^2} - xy). \tag{2'}$$

Die Blattzahl ε_z von z ist nicht nur von den Blattzahlen, sondern auch von der Größe von x und y abhängig. Das System der beiden Gleichungen (2) und (2′) bestimmt aus zwei beliebigen Punkten $P_1\binom{x}{\varepsilon_x}$ und $P_2\binom{y}{\varepsilon_y}$ auf der Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ eindeutig einen dritten Punkt $P_3\binom{z}{\varepsilon_z}$ auf derselben Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$. Wir wollen die Gleichungen (2) und (2′) zusammenfassen in

$$\binom{z}{\varepsilon_z} = \varphi\binom{x}{\varepsilon_x}, \binom{y}{\varepsilon_y}. \tag{3}$$

Mit der durch (2′) gegebenen Zweigfixierung erhält man

$$\binom{x_4}{\varepsilon_4} = \varphi\binom{y}{\varepsilon_y}, \binom{z}{\varepsilon_z} = \binom{x}{\varepsilon_x}$$

während die entgegengesetzte Zweigfixierung

$$x_4 = x - 2xy^2 + 2y\,\varepsilon_x \sqrt{1-x^2}\,\varepsilon_y \sqrt{1-y^2}$$

liefert.

Man kann sagen, daß das System der Gleichungen (2) und (2′) einen Zyklus der Ordnung drei erzeugt. Die Gleichung (2) ist aus dem Additionstheorem für arc sin abgelesen. Man erkennt an diesem Beispiel, wie die Forderung des zyklischen Schließens der Argumentkette geeignet ist, die richtige Zweigfixierung zu induzieren, welche im Additionstheorem verlangt wird, denn die Gleichung (2′) gehört genau zum Additionstheorem von arc cos. Wir werden das Auftreten von Zyklen in Additionstheoremen weiter unten genauer verfolgen.

Es werde nun vorausgesetzt, daß

$$\varphi\binom{x_1}{\varepsilon_1}, \binom{x_2}{\varepsilon_2}, \ldots, \binom{x_s}{\varepsilon_s} = \binom{x_{s+1}}{\varepsilon_{s+1}}$$

eine eindeutige analytische Funktion von s Veränderlichen auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ mit zusätzlicher Zweigfixierung ε_{s+1} des Funktionswertes x_{s+1} auf $\mathfrak{X}$ ist. Wir schreiben auch wieder kürzer

$$\varphi\binom{x_1}{\varepsilon_1}, \binom{x_2}{\varepsilon_2}, \ldots, \binom{x_s}{\varepsilon_s} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s),$$

wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind.

Jede solche Funktion erzeugt aus s unabhängigen Argumenten auf $\mathfrak{X}$ eindeutig ein neues Argument, welches gemäß der zusätzlichen Zweigfixierung in einem eindeutig

bestimmten Blatt von $\mathfrak{X}$ liegt. Wenn man diesen Prozeß iteriert, indem man diese Argumente nach ihrem Index anordnet und nacheinander für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\varphi(x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_{\nu+s-1}) = x_{\nu+s}$$

bildet, dann erhält man eine angeordnete Kette von Argumenten auf $\mathfrak{X}$

$$x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_{s+\nu}, \ldots,$$

welche beliebig weit nach rechts fortgesetzt werden kann. Diese Kette ist homogen in dem Sinn, daß die Verknüpfung von $s + 1$ aufeinanderfolgenden Argumenten an jeder Stelle der Kette die gleiche ist.

Das ist eine natürliche Verallgemeinerung der Iteration von einer Funktion von einer Veränderlichen auf eine Funktion von mehreren Veränderlichen. Der Schwierigkeit (für $s \geqq 2$), daß man bei jedem Schritt s Argumente braucht, aber nur ein Argument neu gewinnt, begegnet man dadurch, daß man die Argumente in einer Kette anordnet und die Erzeugung eines neuen Argumentes immer auf die s vorhergehenden stützt. Die Anzahl s der unabhängigen Veränderlichen nennen wir Stufe. Sie ist identisch mit der Stufe[1]) der später zu betrachtenden Funktionalgleichungen.

Die Festlegung der Anordnung der Argumente in der erzeugenden Relation $\varphi(x, x_2, \ldots, x_s) = x_{s+1}$ ist mit einer gewissen Willkür behaftet. Man kann z. B. zu der Funktion

$$\varphi(x, y) = \frac{1 - x}{1 - xy}$$

zwei verschiedene erzeugende Relationen bilden, indem man

$$\chi_1(x_\nu, x_{\nu+1}) = \varphi(x_\nu, x_{\nu+1}) = x_{\nu+2}$$

bzw.

$$\chi_2(y_\nu, y_{\nu+1}) = \varphi(y_{\nu+1}, y_\nu) = y_{\nu+2}$$

ansetzt. Die zugehörigen Argumentketten haben die Gestalt

$$x_1, x_2, \chi_1(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) = x_3, \ \chi_1[x_2, \chi_1(x_1, x_2)] = \varphi[x_2, \varphi(x_1, x_2)] = x_4, \ldots$$
$$y_1, y_2, \chi_2(y_1, y_2) = \varphi(y_2, y_1) = y_3, \ \chi_2[y_2, \chi_2(y_1, y_2)] = \varphi[\varphi(y_2, y_1), y_2] = y_4, \ldots$$

bzw. nach Substitution des linear gebrochenen Ausdrucks für $\varphi(x, y)$

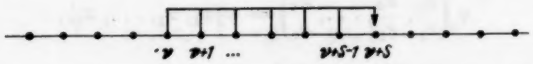
$$x_1, x_2, \frac{1 - x_1}{1 - x_1 x_2} = x_3, 1 - x_1 x_2 = x_4, \frac{1 - x_2}{1 - x_1 x_2} = x_5, \ x_1 = x_6, \ldots$$

$$y_1, y_2, \frac{1 - y_2}{1 - y_1 y_2} = y_3, \ \frac{y_2(1 - y_1)}{1 - y_2 - y_1 y_2 - y_2^2} = y_4,$$

$$\frac{(1 - y_2)^2(1 - y_1 y_2)}{1 - y_1 y_2 - 2y_2 + 2y_2^2 + y_1^2 y_2^2 - y_1 y_2^3} = y_5, \ldots.$$

Die erste Argumentkette schließt sich zyklisch nach fünf Schritten, die zweite aber nicht.

Man kann sich für unseren Iterationsprozeß auch folgende anschauliche Vorstellung ausbilden: Die Argumente sind auf einer Geraden äquidistant angeordnet. Je $s + 1$ aufeinanderfolgende Argumente sind durch dieselbe Funktion miteinander verkettet:



Es läßt sich $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s) = x_{s+1}$ auch als eine Abbildung von s unabhängigen Exemplaren einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ in diese Fläche deuten.

Wenn wir die Kette auch nach links fortsetzen wollen, brauchen wir die Umkehrfunktion φ^{-1} von φ bezüglich des ersten Arguments. Vermöge φ^{-1} kann man innerhalb der Argumentkette auch von rechts nach links fortschreiten und die Kette nach links beliebig weit fortsetzen gemäß

$$\varphi^{-1}\begin{pmatrix} x_{\nu-s+1}, & x_{\nu-s+2}, & \ldots, & x_\nu \\ \varepsilon_{\nu-s+1}, & \varepsilon_{\nu-s+2}, & & \varepsilon_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\nu-s} \\ \varepsilon_{\nu-s} \end{pmatrix}, \quad \nu \equiv 0(1).$$

$\varphi^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_s) = x_0$ soll ebenso wie $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s) = x_{s+1}$ eine eindeutige analytische Funktion von s Veränderlichen über derselben Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ mit zusätzlicher Zweigfixierung des Funktionswertes auf $\mathfrak{X}$ sein, so daß die Relationen

$$\varphi\left\{\varphi^{-1}\begin{pmatrix} x_2, & \ldots, & x_s & x_{s+1} \\ \varepsilon_2, & \ldots, & \varepsilon_s, & \varepsilon_{s+1} \end{pmatrix}, \begin{matrix} x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_2, & & \varepsilon_s \end{matrix}\right\} = \begin{pmatrix} x_{s+1} \\ \varepsilon_{s+1} \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{-1}\left\{\begin{matrix} x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_2, & & \varepsilon_s \end{matrix}, \varphi\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & & \varepsilon_s \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

gelten. Wir geben nun folgende Definition:

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & & \varepsilon_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{s+1} \\ \varepsilon_{s+1} \end{pmatrix}$$

heißt genau dann erzeugende Relation einer Argumentkette s-ter Stufe, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

$$(4') \qquad \varphi\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & & \varepsilon_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{s+1} \\ \varepsilon_{s+1} \end{pmatrix}$$

existiert und ist eine eindeutige analytische Funktion von s Veränderlichen auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$. Die Blattzahl ε_{s+1} von x_{s+1} ist eindeutig fixiert als Funktion von $\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & & \varepsilon_s \end{pmatrix}$, *und die Funktionswerte* $\begin{pmatrix} x_{s+1} \\ \varepsilon_{s+1} \end{pmatrix}$ *nehmen jeden Wert auf $\mathfrak{X}$ an.*

(4″) *Die Umkehrfunktion*

$$\varphi^{-1}\begin{pmatrix} x_2, & x_3, & \ldots, & x_{s+1} \\ \varepsilon_2, & \varepsilon_3, & & \varepsilon_{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

von φ bezüglich des ersten Arguments existiert und ist eine eindeutige analytische Funktion von s Veränderlichen auf derselben Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$. Die Blattzahl ε_1 von x_1 ist eindeutig fixiert als Funktion von $\begin{pmatrix} x_2, & x_3, & \ldots, & x_{s+1} \\ \varepsilon_2, & \varepsilon_3, & & \varepsilon_{s+1} \end{pmatrix}$, *und die Funktionswerte* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$ *nehmen jeden Wert auf $\mathfrak{X}$ an.*

$$(4''') \qquad \varphi\begin{pmatrix} x_\nu, & x_{\nu+1}, & \ldots, & x_{\nu+s-1} \\ \varepsilon_\nu, & \varepsilon_{\nu+1}, & & \varepsilon_{\nu+s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\nu+s} \\ \varepsilon_{\nu+s} \end{pmatrix},$$

$$\varphi^{-1}\begin{pmatrix} x_{\nu-s+1}, & x_{\nu-s+2}, & \ldots, & x_\nu \\ \varepsilon_{\nu-s+1}, & \varepsilon_{\nu-s+2}, & & \varepsilon_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\nu-s} \\ \varepsilon_{\nu-s} \end{pmatrix}$$

für alle $\nu \equiv 0(1)$.

Wir nennen insbesondere eine erzeugende Relation $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s) = x_{s+1}$ und die durch sie erzeugte Argumentkette *entartet*, wenn $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ in einer oder mehreren der Veränderlichen $x_2, x_3, \ldots, x_s$ konstant ist.

Beispiele:

$$\varphi(x, y) = g(x):$$
$$\ldots, g^{-2}(y), g^{-1}(x), g^{-1}(y), x, y, g(x), g(y), g^2(x), \ldots$$
$$\varphi(x, y, z) = xz:$$
$$\ldots, \frac{y}{x}, \frac{z}{y}, x, y, z, xz, xyz, xyz^2, \ldots.$$

Darüber hinaus werden wir auch eine Argumentkette $(s-1)$-ter und niederer Stufe als eine entartete Argumentkette s-ter Stufe ansprechen.

Über der durch eine Relation $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{s+1})$ erzeugten Argumentkette s-ter Stufe als Basis definieren wir nun eine abstrakte Operation und nennen sie „Umsetzung s-ter Stufe".

Definition: *Eine Umsetzung s-ter Stufe* $\mathfrak{u}$ *ist die abstrakte Operation, welche in einer durch eine erzeugende Relation* $\varphi\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & & \varepsilon_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{s+1} \\ \varepsilon_{s+1} \end{pmatrix}$ *definierten Argumentkette s-ter Stufe einem s-tupel benachbarter Argumente* $x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_{\nu+s-1}$ *das nächste Argument eindeutig zuordnet. Die erzeugende Relation der Argumentkette heißt auch erzeugende Relation der Umsetzung* $\mathfrak{u}$.

Dabei ist die Meinung, daß die Umsetzung $\mathfrak{u}$ als Operator zu der Argumentkette etwa in demselben Verhältnis steht wie die Operation „Translation" zu den Punkten einer Ebene, welche der Translation unterworfen wird. Diese Parallele möge die Vorstellung unterstützen, wobei natürlich der Analogie Grenzen gesetzt sind.

Definition: *Eine Umsetzung s-ter Stufe heißt zyklisch von der Ordnung n* $(n \geqq s)$ *genau dann, wenn eine natürliche Zahl n existiert, so daß in der zugehörigen Argumentkette*

$$\begin{pmatrix} x_{\nu+n} \\ \varepsilon_{\nu+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\nu \\ \varepsilon_\nu \end{pmatrix} \text{ für alle } \nu \equiv 0(1)$$

gilt und $n \geqq 1$ *minimal ist.*

Wir erklären eine Äquivalenz zwischen Umsetzungen der gleichen Stufe:

Zwei Umsetzungen $\mathfrak{u}$ *und* $\mathfrak{v}$ *mit den erzeugenden Relationen*

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & & \varepsilon_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{s+1} \\ \varepsilon_{s+1} \end{pmatrix} \text{ auf } \mathfrak{X}$$

und

$$\chi\begin{pmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_s \\ \delta_1, & \delta_2, & & \delta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{s+1} \\ \delta_{s+1} \end{pmatrix} \text{ auf } \mathfrak{Y}$$

heißen genau dann äquivalent, wenn eine umkehrbar eindeutige und analytische Transformation von $\mathfrak{X}$ *auf* $\mathfrak{Y}$ *existiert,* $\begin{pmatrix} x \\ \varepsilon_x \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} y \\ \delta_y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y \\ \delta_y \end{pmatrix} = t^{-1}\begin{pmatrix} x \\ \varepsilon_x \end{pmatrix}$, *so daß*

$$t^{-1}\left\{\varphi\left[t\begin{pmatrix} y_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}, t\begin{pmatrix} y_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \ldots, t\begin{pmatrix} y_s \\ \delta_s \end{pmatrix}\right]\right\} = \chi\begin{pmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_s \\ \delta_1, & \delta_2, & & \delta_s \end{pmatrix} \tag{5}$$

identisch in $y_1, y_2, \ldots, y_s$ *gilt. Wir wählen die Bezeichnung*

$$\mathfrak{u} \underset{t}{\sim} \mathfrak{v} \text{ oder kürzer } \mathfrak{u} \sim \mathfrak{v}.$$

Zwei äquivalente Umsetzungen $\mathfrak{u}$ *und* $\mathfrak{v}$ *heißen insbesondere gleich,* $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$, *genau dann, wenn* $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ *und* $\varphi\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & & y_s \\ \delta_1, & \delta_2, & \ldots, & \delta_s \end{pmatrix} = \chi\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & & y_s \\ \delta_1, & \delta_2, & \ldots, & \delta_s \end{pmatrix}$, *identisch in* $y_1, y_2, \ldots, y_s$, *gilt.*

Die angegebene Äquivalenzrelation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Alle zu einer zyklischen Umsetzung äquivalenten Umsetzungen sind wieder zyklisch von der gleichen Ordnung.

Man erkennt diesen Satz ohne Schwierigkeiten als richtig, wenn man die Argumentketten vergleicht.

Argumentkette von $\mathfrak{u}$:

$$\ldots, \varphi^{-1}[\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_s), x_1, \ldots, x_{s-1}], \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_s), x_1, x_2, \ldots, x_s,$$
$$\varphi(x_1, \ldots, x_s), \varphi[x_2, \ldots, x_s, \varphi(x_1, \ldots, x_s)], \ldots$$

Argumentkette einer dazu äquivalenten Umsetzung:

$$\ldots, t^{-1}\varphi^{-1}[\varphi^{-1}(ty_1, \ldots, ty_s), ty_1, \ldots, ty_{s-1}], t^{-1}\varphi^{-1}(ty_1, \ldots, ty_s), y_1, y_2, \ldots, y_s,$$
$$t^{-1}\varphi(ty_1, \ldots, ty_s), t^{-1}\varphi[ty_2, \ldots, ty_s, \varphi(ty_1, \ldots, ty_s)], \ldots.$$

Die Zyklen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_6$ sind zyklische Umsetzungen zweiter Stufe der Ordnung fünf und zueinander äquivalent.

Zusammen mit jeder Umsetzung $\mathfrak{u}$ betrachten wir zwei weitere Umsetzungen, welche sich direkt an die Argumentkette von $\mathfrak{u}$ anschließen lassen. Wir wollen sie durch die Bezeichnungen „inverse" Umsetzung zu $\mathfrak{u}$ und „gestürzte" Umsetzung zu $\mathfrak{u}$ unterscheiden.

Definitionen: *Die inverse Umsetzung* $\mathfrak{u}^{-1}$ *zu der Umsetzung* $\mathfrak{u}$ *wird erzeugt durch die Relation*

$$\begin{pmatrix} x_{\nu-s} \\ \varepsilon_{\nu-s} \end{pmatrix} = \varphi^{-1}\begin{pmatrix} x_{\nu-s+1}, & x_{\nu-s+2}, & \ldots, & x_\nu \\ \varepsilon_{\nu-s+1}, & \varepsilon_{\nu-s+2}, & \ldots, & \varepsilon_\nu \end{pmatrix}, \quad \nu \equiv 0(1).$$

$\mathfrak{u}^{-1}$ *ist als Umsetzung über der zu* $\mathfrak{u}$ *gehörigen Argumentkette zu denken und bewirkt in dieser Kette eine Verschiebung der Argumente um eine Einheit nach links.*

Die gestürzte Umsetzung $\mathfrak{u}^*$ *zu der Umsetzung* $\mathfrak{u}$ *wird erzeugt durch die Relation*

$$\varphi^*\begin{pmatrix} y_\nu & y_{\nu+1} & & y_{\nu+s-1} \\ \delta_\nu, & \delta_{\nu+1}, & \ldots, & \delta_{\nu+s-1} \end{pmatrix} = \varphi^{-1}\begin{pmatrix} y_{\nu+s-1} & & y_{\nu+1} & y_\nu \\ \delta_{\nu+s-1}, & \ldots, & \delta_{\nu+1}, & \delta_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{\nu+s} \\ \delta_{\nu+s} \end{pmatrix}, \nu \equiv 0(1).$$

Die Argumentkette von $\mathfrak{u}^*$ lautet:

$$\ldots, \varphi[y_{s-1}, \ldots, y_1, \varphi(y_s, \ldots, y_1)], \varphi(y_s, \ldots, y_1), y_1, y_2, \ldots, y_s,$$
$$\varphi^{-1}(y_s, \ldots, y_1), \varphi^{-1}[\varphi^{-1}(y_s, \ldots, y_1), y_s, \ldots, y_2], \ldots.$$

Es ist zweckmäßig, die beiden Umsetzungen $\mathfrak{u}^{-1}$ und $\mathfrak{u}^*$ auseinander zu halten, obwohl sie sich nur dadurch unterscheiden, daß die eine nach links und die andere nach rechts gerichtet ist.

Es kann vorkommen, daß $\mathfrak{u}^* = \mathfrak{u}$ ist. Wir definieren:

Eine Umsetzung heißt genau dann selbstumkehrbar, wenn $\mathfrak{u}^* = \mathfrak{u}$ *ist.*

Das ist gleichbedeutend damit, daß

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \ldots, & \varepsilon_s \end{pmatrix} = \varphi^*\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \ldots, & \varepsilon_s \end{pmatrix} = \varphi^{-1}\begin{pmatrix} x_s, & \ldots, & x_2, & x_1 \\ \varepsilon_s, & \ldots, & \varepsilon_2, & \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_s$ ist und daß die Blattzahlen von φ und φ^* übereinstimmen.

Die Argumentkette einer selbstumkehrbaren Umsetzung hat die Form

$$\ldots, \varphi[x_{s-1}, \ldots, x_1, \varphi(x_s, \ldots, x_1)], \varphi(x_s, \ldots, x_1), x_1, x_2, \ldots, x_s,$$
$$\varphi(x_1, \ldots, x_s), \varphi[x_2, \ldots, x_s, \varphi(x_1, \ldots, x_s)], \ldots.$$

Die zyklischen Umsetzungen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_6$ z. B. sind selbstumkehrbar. Wir definieren noch:

$$\varphi(x) = x$$

ist die erzeugende Relation der Einheitsumsetzung $\mathfrak{e}$.

Die Einheitsumsetzung ist eine Umsetzung erster Stufe. Wir führen die „*Iterierten*" φ_n von $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ durch die Relationen

$$\begin{pmatrix} x_{\nu+s+n} \\ \varepsilon_{\nu+s+n} \end{pmatrix} = \varphi_n\begin{pmatrix} x_{\nu+1}, & x_{\nu+2}, & \ldots, & x_{\nu+s} \\ \varepsilon_{\nu+1}, & \varepsilon_{\nu+2}, & \ldots, & \varepsilon_{\nu+s} \end{pmatrix}, \quad \nu \equiv 0(1),$$

und ebenso die Iterierten φ_n^{-1} von $\varphi^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ durch

$$\begin{pmatrix} x_{\nu-s-n} \\ \varepsilon_{\nu-s-n} \end{pmatrix} = \varphi_n^{-1}\begin{pmatrix} x_{\nu-s}, & x_{\nu-s+1}, & \ldots, & x_{\nu-1} \\ \varepsilon_{\nu-s}, & \varepsilon_{\nu-s+1}, & \ldots, & \varepsilon_{\nu-1} \end{pmatrix}, \quad \nu \equiv 0(1),$$

für $n = 2, 3, \ldots$ ein. Die Iterierten von φ bestimmen sich eindeutig mit Hilfe von φ und ebenso die Iterierten von φ^{-1} mit Hilfe von φ^{-1}.

Beispiele:

$$\varphi\left\{\begin{matrix} x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_2, & \ldots, & \varepsilon_s \end{matrix}, \varphi\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \ldots, & \varepsilon_s \end{pmatrix}\right\} \doteq \varphi_2\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \ldots, & \varepsilon_s \end{pmatrix},$$

$$\varphi^{-1}\left\{\varphi^{-1}\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \ldots, & \varepsilon_s \end{pmatrix}, \begin{matrix} x_1, & \ldots, & x_{s-1} \\ \varepsilon_1, & \ldots, & \varepsilon_{s-1} \end{matrix}\right\} \doteq \varphi_2^{-1}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \ldots, & \varepsilon_s \end{pmatrix}.$$

Hier schließt sich die Aufgabe an, ein Element einer Argumentkette s-ter Stufe in Abhängigkeit von s beliebigen anderen Argumenten darzustellen. Es sind jedenfalls $s + 1$ beliebig herausgegriffene Argumente der Kette voneinander abhängig. Man gewinnt diese Abhängigkeit, indem man z. B. diese $s + 1$ Argumente $x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_{s+1}}$ durch s aufeinanderfolgende $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_{\nu+s}$ (etwa $\nu + s < \nu_i$, $i = 1, 2, \ldots, s + 1$) mit Hilfe der Iterierten darstellt und aus s dieser Darstellungen $x_{\nu_i}(x_{\nu+1}, \ldots, x_{\nu+s})$ die $x_{\nu+1}, \ldots, x_{\nu+s}$ eliminiert, falls dies möglich ist, und in die $(s + 1)$-te Darstellung $x_{\nu_k}(x_{\nu+1}, \ldots, x_{\nu+s})$ einsetzt. Die $x_{\nu+\sigma}$ sind in Abhängigkeit von den x_{ν_i} im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Wir gehen nun daran, zu einer gegebenen Umsetzung $\mathfrak{u}$ die „*Potenzen*" $\mathfrak{u}^n$ zu definieren. Die Umsetzung $\mathfrak{u}$ wurde definiert als Operator über einer angeordneten Kette von Argumenten. Wir können uns die Vorstellung ausbilden, daß eine solche Umsetzung an einem Argument x_ν der Kette angreift und dieses Argument mit Unterstützung der Vorgänger $x_{\nu-1}, x_{\nu-2}, \ldots, x_{\nu-s+1}$ um ein Glied nach rechts nach $x_{\nu+1}$ verschiebt. Es erscheint sinnvoll, als $\mathfrak{u}^2$ diejenige Umsetzung zu definieren, welche eine Verschiebung nach rechts um zwei Glieder bewirkt. Dann müssen aber auch die Vorgänger immer mit dem Adstand zwei ausgewählt werden. Wir legen also als Argumentkette für $\mathfrak{u}^2$ die Argumente $x_{2\nu}$ (bzw. $x_{2\nu+1}$) zugrunde und bestimmen die erzeugende Funktion φ^2 von $\mathfrak{u}^2$,

indem wir s im Abstand zwei aufeinanderfolgende Argumente, etwa $x_2, x_4, x_6, \ldots, x_{2s}$, als unabhängig wählen und x_{2s+2} in Abhängigkeit von diesen ausrechnen, falls dies möglich ist. Die so bestimmte Relation

$$\varphi^2(x_\nu, x_{\nu+2}, \ldots, x_{\nu+2s-2}) = x_{\nu+2s}$$

wird im allgemeinen unsere Eindeutigkeitsvoraussetzungen für erzeugende Relationen nicht erfüllen. Wenn sich aber ein φ^2 so bestimmen läßt, daß die Forderungen (4′) bis (4‴) für erzeugende Relationen einer Argumentkette erfüllt sind, dann heißt diese Relation die erzeugende Relation der Umsetzung $\mathfrak{u}^2$. Wir erhalten folgendes Bild:

In Sonderfällen kann die Stufe von $\mathfrak{u}^2$ kleiner sein als die von $\mathfrak{u}$.

Für die Umsetzung $\mathfrak{u}^n$ werden wir die Argumentkette aus den Argumenten $x_{n\nu}$ (bzw. $x_{n\nu+\lambda}$, $0 \leqq \lambda \leqq n-1$) zugrunde legen, welche in der zu $\mathfrak{u}$ gehörigen Kette im Abstand n aufeinander folgen. Wir definieren:

$\mathfrak{u}^n (n = 1, 2, \ldots)$ *hat die erzeugende Relation*

$$\varphi^n(x_\nu, x_{\nu+n}, \ldots, x_{\nu+ns-n}) = x_{\nu+ns},$$

falls sich die Funktion φ^n so bestimmen läßt, daß unsere Forderungen (4′) bis (4‴) für erzeugende Relationen erfüllt werden.

Der Vergleich verschiedener Potenzen einer Umsetzung $\mathfrak{u}$ ist nur dann widerspruchsfrei, wenn man alle diese Potenzen auf die Argumentkette von $\mathfrak{u}$ bezieht. Beispiele für die Potenzbildung:

$$\mathfrak{z}_1^2 = \mathfrak{z}_2, \quad \mathfrak{z}_1^4 = \mathfrak{z}_2^2 = \mathfrak{z}_1^{-1}, \quad \mathfrak{z}_1^5 = \mathfrak{e}; \quad \mathfrak{z}_3^2 = \mathfrak{z}_4; \quad \mathfrak{z}_5^2 = \mathfrak{z}_6.$$

Wie bei der Bildung von $\mathfrak{u}^2$ gilt auch bei den höheren Potenzen, daß die Stufe einer Potenz $\mathfrak{u}^n$ kleiner sein kann als die Stufe von $\mathfrak{u}$. Es soll hier nicht untersucht werden, unter welchen Bedingungen zu einer vorgegebenen Umsetzung $\mathfrak{u}$ die Potenzen dieser Umsetzung existieren.

Wir erklären noch, was wir unter einer „Kovarianten bzw. Invarianten einer Umsetzung" verstehen wollen.

Definition: *Wenn durch die Relation* $\begin{pmatrix} x_{\nu+s} \\ \varepsilon_{\nu+s} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} x_\nu, & x_{\nu+1}, & \ldots, & x_{\nu+s-1} \\ \varepsilon_\nu, & \varepsilon_{\nu+1}, & \ldots, & \varepsilon_{\nu+s-1} \end{pmatrix}$ *eine Umsetzung $\mathfrak{u}$ der Stufe s über der Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ erzeugt wird, dann heißt eine eindeutige Funktion* $k \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \ldots, & \varepsilon_s \end{pmatrix}$ *von s Veränderlichen auf $\mathfrak{X}$ eine Kovairante dieser Umsetzung genau dann, wenn eine Funktion $\alpha(u) = v$ existiert, welche den Wertebereich von k umkehrbar eindeutig auf sich abbildet, so daß*

$$k \left\{ \begin{matrix} x_2, & \ldots, & x_s, \\ \varepsilon_2, & \ldots, & \varepsilon_s \end{matrix} \varphi \begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \ldots, & \varepsilon_s \end{pmatrix} \right\} = \alpha \left[k \begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \ldots, & \varepsilon_s \end{pmatrix} \right] \tag{6}$$

gilt. Wir werden dafür auch schreiben

$$\mathfrak{u}[k] = \alpha(k). \tag{6'}$$

Wenn insbesondere $\alpha(u) = u$ ist, nennen wir $k \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_s \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \ldots, & \varepsilon_s \end{pmatrix}$ *eine Invariante der Umsetzung $\mathfrak{u}$.*

Z. B. ist

$$k(x, y) = xy \frac{(1-x)(1-y)}{1-xy}$$

eine Invariante der zyklischen Umsetzung $\mathfrak{z}_1$.

Wir stellen noch die Frage, ob man den neu eingeführten Begriff der Umsetzung mit bekannten algebraischen Strukturen in Verbindung bringen kann, wobei wir den Begriff „algebraische Struktur" in seinem allgemeinen Inhalt in Anspruch nehmen für eine Menge von Elementen, in welcher für gewisse Elemente mindestens eine Verknüpfung mit gewissen Eigenschaften definiert ist.

Man könnte zunächst daran denken, die Umsetzung dadurch an eine algebraische Struktur anzuschließen, daß man die Menge der Argumente zu einer algebraischen Struktur macht, indem man als Relation in dieser Menge die Verknüpfung von s Argumenten zu einem neuen Argument einführt. Bei der Darstellung der assoziativen Eigenschaften legten wir diese Auffassungen zugrunde.

Bei der Beschreibung der zyklischen Eigenschaften werden wir aber eine andere Deutung bevorzugen. Wir gehen aus von einer festen Umsetzung $\mathfrak{u}$ und ihren sämtlichen Potenzen $\mathfrak{u}^n$ und setzen zu diesem Zweck voraus, daß $\mathfrak{u}$ so beschaffen ist, daß sämtliche Potenzen $\mathfrak{u}^n (n = 1, 2, \ldots)$ als Umsetzungen im Sinne unserer Definition existieren. Ebenso sollen auch sämtliche Potenzen $\mathfrak{u}^{-n} (n = 1, 2, \ldots)$ von $\mathfrak{u}^{-1}$ existieren. Die zu $\mathfrak{u}$ gehörige Argumentkette gibt uns also eine Menge von Umsetzungen an die Hand, die wir in einfacher Weise zu einer algebraischen Struktur machen können, indem wir zwischen zwei Elementen dieser Menge folgende Multiplikation erklären:

$$(7) \quad \exists\, \mathfrak{u}^m \;\&\; \exists\, \mathfrak{u}^n \;\&\; \exists\, \mathfrak{u}^{m+n} \curvearrowright \mathfrak{u}^m \cdot \mathfrak{u}^n = \mathfrak{u}^{m+n}, \quad n \equiv 0(1) \;\&\; m \equiv 0(1).$$

Dabei ist die Meinung, daß die Definition des Produktes von Potenzen $\mathfrak{u}^m \cdot \mathfrak{u}^n$ voraussetzt, daß die Potenzen $\mathfrak{u}^m, \mathfrak{u}^n, \mathfrak{u}^{m+n}$ im Sinne unserer Definition existieren. Die Potenzen werden also nicht durch die Multiplikation erklärt, sondern umgekehrt, nachdem eine Menge von Potenzen eingeführt ist, wird nachträglich eine Multiplikation verabredet.

Das Einheitselement der durch Gleichung (7) definierten Verknüpfung ist die Umsetzung $\mathfrak{u}^0 = \mathfrak{e}$. Die Verknüpfung (7) macht die Menge U der Potenzen $\mathfrak{u}^n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ von Umsetzungen, falls alle Potenzen als Umsetzungen im Sinne unserer Definition existieren, zu einer zyklischen Gruppe, welche isomorph zur additiven Gruppe aller ganzen Zahlen ist.

Eine zyklische Umsetzung der Ordnung n wird charakterisiert durch

$$\exists\, \mathfrak{u}^n \;\&\; \mathfrak{u}^n = \mathfrak{e} \;\&\; n \geqq 1 \text{ minimal.}$$

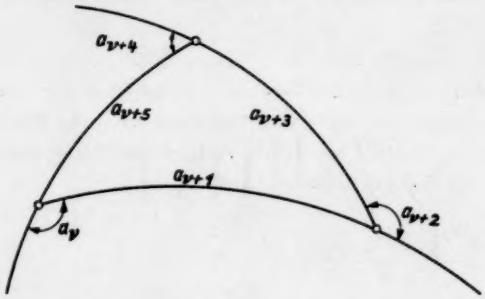
Die Potenzen $\mathfrak{u}^l$ einer zyklischen Umsetzung $\mathfrak{u}$ sind, falls sie existieren, wieder zyklisch. Ihre Ordnungen n_l sind Teiler der Ordnung n von $\mathfrak{u}$.

$$(\mathfrak{u}^l)^{n_l} = \mathfrak{e}, \; n_l = \frac{n}{\langle l, n \rangle}, \; \langle l, n \rangle = \text{größter gemeinsamer Teiler von } l \text{ und } n.$$

§ 7. Weitere Beispiele für zyklische Umsetzungen.

In diesem Paragraphen werden wir zyklische Umsetzungen am schiefwinkligen sphärischen Dreieck, an den sphärischen Polygonen und in Schläflis Orthoschemketten nachweisen.

Mit a_ν bezeichnen wir die Seiten und Außenwinkel eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks in zyklischer Reihenfolge wie in der folgenden Figur.



Wir beschränken uns auf Eulersche Dreiecke, d. h. $0 < a_\nu < \pi$ für alle ν. Dann gelten bekanntlich folgende Formeln (ν mod 6):

$$\cos a_{\nu+4} = \cos a_\nu \cos a_{\nu+2} - \sin a_\nu \sin a_{\nu+2} \cos a_{\nu+1}, \tag{1}$$

$$\operatorname{ctg} a_{\nu+3} = \frac{-\sin a_\nu \cos a_{\nu+2} \cos a_{\nu+1} - \sin a_{\nu+2} \cos a_\nu}{\sin a_\nu \sin a_{\nu+1}}, \tag{2}$$

$$\frac{\sin a_\nu}{\sin a_{\nu+3}} = \frac{\sin a_{\nu+2}}{\sin a_{\nu+5}} = \frac{\sin a_{\nu+4}}{\sin a_{\nu+1}} \doteq k^*(a_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}). \tag{3}$$

Unter Benutzung von (2) erhält man aus (3) für den Modul k^*

$$k^{*2}(a_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}) \tag{4}$$
$$= \frac{\sin^2 a_\nu + \sin^2 a_{\nu+2} - 2\sin^2 a_\nu \sin^2 a_{\nu+2} + \sin^2 a_\nu \sin^2 a_{\nu+1} \sin^2 a_{\nu+2} + 2\sin a_\nu \sin a_{\nu+2} \cos a_\nu \cos a_{\nu+1} \cos a_{\nu+2}}{\sin^2 a_{\nu+1}}.$$

Die Wurzel aus k^{*2} ist eindeutig fixierbar, denn die $\sin a_\nu$ sind auf Grund unserer Beschränkung auf Eulersche Dreiecke sämtlich positiv. Wir erhalten also, wenn mit k^* die positive Wurzel aus k^{*2} bezeichnet wird,

$$\sin a_{\nu+3} = \frac{\sin a_\nu}{k^*(a_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2})}. \tag{5}$$

Die beiden Gleichungen (2) und (5) geben $a_{\nu+3}$ $(0 < a_{\nu+3} < \pi)$ eindeutig als Funktion von $a_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}$ für jedes ν. Sie bilden die Grundlage für die erzeugende Relation einer zyklischen Umsetzung dritter Stufe der Ordnung sechs. Mit der Substitution

$$\sin a_\nu \doteq x_\nu, \ \cos a_\nu \doteq \varepsilon_\nu \sqrt{1 - x_\nu^2}, \ \varepsilon_\nu = \begin{cases} +1, & 0 < a_\nu < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < a_\nu < \pi \end{cases} \tag{6}$$

($\sqrt{x}$ bezeichnet immer den positiven Zweig, der bei $x = +1$ positiv ist) und mit

$$k^*(a_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}) \doteq k\begin{pmatrix} x_\nu, & x_{\nu+1}, & x_{\nu+2} \\ \varepsilon_\nu, & \varepsilon_{\nu+1}, & \varepsilon_{\nu+2} \end{pmatrix} = k(x_\nu, x_{\nu+1}, x_{\nu+2}) \tag{7}$$

folgen aus den Gleichungen (2), (4) und (5) die Relationen

$$x_{\nu+3} = \frac{x_\nu}{k(x_\nu, x_{\nu+1}, x_{\nu+2})}, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{\nu+3}\sqrt{1 - x_{\nu+3}^2} = \frac{-x_\nu \, \varepsilon_{\nu+2}\sqrt{1 - x_{\nu+2}^2} \, \varepsilon_{\nu+1}\sqrt{1 - x_{\nu+1}^2} - x_{\nu+2} \, \varepsilon_\nu \sqrt{1 - x_\nu^2}}{x_{\nu+1} \, k(x_\nu, x_{\nu+1}, x_{\nu+2})}, \tag{8'}$$

$$(9)\quad k^2(x_\nu, x_{\nu+1}, x_{\nu+2})$$
$$= \frac{x_\nu^2 + x_{\nu+2}^2 - 2x_\nu^2\, x_{\nu+2}^2 + x_\nu^2\, x_{\nu+1}^2\, x_{\nu+2}^2 + 2x_\nu\, x_{\nu+2}\, \varepsilon_\nu \sqrt{1-x_\nu^2}\, \varepsilon_{\nu+1} \sqrt{1-x_{\nu+1}^2}\, \varepsilon_{\nu+2} \sqrt{1-x_{\nu+2}^2}}{x_{\nu+1}^2}.$$

Die Relation (8) zusammen mit der Zweigfixierung (8′) erzeugt eine selbstumkehrbare zyklische Umsetzung dritter Stufe der Ordnung sechs über der zweiblättrigen Riemannschen Fläche mit Windungspunkten erster Ordnung in ± 1. Wir nennen die durch die Relationen (8) und (8′) erzeugte Umsetzung $\mathfrak{u}$ die Umsetzung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks. Die zugehörige Argumentkette lautet

$$(10)\qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

$$x_4 = x_1 [k(x_1, x_2, x_3)]^{-1},$$
$$\frac{\varepsilon_4 \sqrt{1-x_4^2}}{x_4} = \frac{-x_1\, \varepsilon_3 \sqrt{1-x_3^2}\, \varepsilon_2 \sqrt{1-x_2^2} - x_3\, \varepsilon_1 \sqrt{1-x_1^2}}{x_1\, x_2},$$
$$x_5 = x_2\, k(x_1, x_2, x_3),$$
$$\varepsilon_5 \sqrt{1-x_5^2} = \varepsilon_1 \sqrt{1-x_1^2}\, \varepsilon_3 \sqrt{1-x_3^2} - x_1 x_3 \varepsilon_2 \sqrt{1-x_2^2},$$
$$x_6 = x_3 [k(x_1, x_2, x_3)]^{-1},$$
$$\frac{\varepsilon_6 \sqrt{1-x_6^2}}{x_6} = \frac{-x_3\, \varepsilon_1 \sqrt{1-x_1^2}\, \varepsilon_2 \sqrt{1-x_2^2} - x_1\, \varepsilon_3 \sqrt{1-x_3^2}}{x_2\, x_3},$$
$$\begin{pmatrix} x_7 \\ \varepsilon_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \ldots.$$

Für den Modul ergeben sich die weiteren Darstellungen

$$(9')\quad k^2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1 - [\varepsilon_1 \sqrt{1-x_1^2}\, \varepsilon_3 \sqrt{1-x_3^2} - x_1\, x_3\, \varepsilon_2 \sqrt{1-x_2^2}]^2}{x_2^2}$$
$$(9')\qquad = x_1^2 + \frac{[x_1\, \varepsilon_3 \sqrt{1-x_3^2}\, \varepsilon_2 \sqrt{1-x_2^2} + x_3\, \varepsilon_1 \sqrt{1-x_1^2}]^2}{x_2^2}$$
$$(9')\qquad = x_3^2 + \frac{[x_3\, \varepsilon_1 \sqrt{1-x_1^2}\, \varepsilon_2 \sqrt{1-x_2^2} + x_1\, \varepsilon_3 \sqrt{1-x_3^2}]^2}{x_2^2}.$$

Diese Darstellungen setzen voraus, daß $k(x_1, x_2, x_3)$ definiert ist als

$$(3')\qquad k(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{x_4} = \frac{x_3}{x_6} = \frac{x_5}{x_2}.$$

Neben $k(x_1, x_2, x_3)$ kann gleichberechtigt $[k(x_1, x_2, x_3)]^{-1}$ als Modul verwendet werden. Es gilt

$$(11)\qquad [k(x_1, x_2, x_3)]^{-2}$$
$$= \frac{x_2^2 [x_1^2 + x_3^2 - 2x_1^2\, x_3^2 + x_1^2\, x_2^2\, x_3^2 - 2x_1\, x^3\, \varepsilon_1 \sqrt{1-x_1^2}\, \varepsilon_2 \sqrt{1-x_2^2}\, \varepsilon_3 \sqrt{1-x_3^2}]}{(x_1^2 + x_3^2 - x_1^2\, x_2^2\, x_3^2)^2 - 4x_1\, x_3\, (1-x_2^2)}.$$

Aus der Gleichung (3′) folgt

$$(12)\quad k^2(x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, x_{\nu+3}) \doteq \mathfrak{u}[k^2(x_\nu, x_{\nu+1}, x_{\nu+2})] = [k(x_\nu, x_{\nu+1}, x_{\nu+2})]^{-2}.$$

In Worten: Der Modul k des sphärischen Dreiecks ist eine Kovariante der zyklischeu Umsetzung $\mathfrak{u}$ des sphärischen Dreiecks.

Wir stellen noch die Darstellung des Moduls durch die drei Seiten bzw. drei Winkel bereit und bezeichnen diese Funktion mit $\mathring{k}(x_1, x_3, x_5)$. Sie kann direkt aus dem cos-Satz (1) gewonnen werden:

$$(13)\qquad \mathring{k}^2(x_1, x_3, x_5) = \frac{x_1^2 x_3^2 x_5^2}{(x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 - 2) + 2\varepsilon_1\sqrt{1-x_1^2}\,\varepsilon_3\sqrt{1-x_3^2}\,\varepsilon_5\sqrt{1-x_5^2}},$$

$$(13')\qquad \mathring{k}_2^2(x_1, x_3, x_5) = \frac{x_1^2 x_3^2 x_5^2\left[(x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 - 2) - 2\varepsilon_1\sqrt{1-x_1^2}\,\varepsilon_3\sqrt{1-x_3^2}\,\varepsilon_5\sqrt{1-x_5^2}\right]}{x_1^4 + x_3^4 + x_5^4 - 2(x_1^2x_3^2 + x_3^2x_5^2 + x_5^2x_1^2) + 4x_1^2x_3^2x_5^2},$$

$$\mathring{k}(x_1, x_3, x_5) = \frac{x_1}{x_4} = \frac{x_3}{x_6} = \frac{x_5}{x_2}.$$

Führt man anstelle der $\sin a_\nu \doteq x_\nu$ die $\cos a_\nu \doteq \varepsilon_\nu\sqrt{1-x_\nu^2} \doteq \bar{x}_\nu$ ein, dann entsteht aus Gleichung (13) der rationale Ausdruck

$$(14)\qquad \mathring{k}^2(x_1, x_3, x_5) = \frac{(1-\bar{x}_1^2)(1-\bar{x}_3^2)(1-\bar{x}_5^2)}{1-\bar{x}_1^2-\bar{x}_3^2-\bar{x}_5^2+2\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_5}.$$

Die Potenzen der zyklischen Umsetzung $\mathfrak{u}$ führen zu den trivialen Umsetzungen

$$(15)\qquad \mathfrak{u}^2:\ \varphi^2(x_\nu, x_{\nu+2}, x_{\nu+4}) = x_\nu$$

bzw.

$$(16)\qquad \mathfrak{u}^3:\ \varphi^3(x_\nu, x_{\nu+3}) = x_\nu.$$

Wir werden aber am Beispiel der Umsetzung $\mathfrak{u}^2$ studieren, wie durch Einführung von Invarianten die Stufe erniedrigt werden kann und wie dadurch interessante Umsetzungen entstehen.

Jede symmetrische Funktion $\varkappa(x_1, x_3, x_5)$ in x_1, x_3, x_5 ist eine Invariante der Umsetzung $\mathfrak{u}^2$. Aber nicht jede solche Funktion $\varkappa(x_1, x_3, x_5)$ ist als Funktion über der zu $\mathfrak{u}$ gehörigen Kette

$$\varkappa[x_1, x_3, x_5(x_1, x_2, x_3)] \doteq \varkappa^*(x_1, x_2, x_3)$$

Kovariante der Umsetzung $\mathfrak{u}$. Wir wählen als spezielle Invariante von $\mathfrak{u}^2$ den Modul $\mathring{k}(x_1, x_3, x_5)$ und x_1, x_3, x_5 als drei benachbarte, unabhängige Argumente der Argumentkette von $\mathfrak{u}^2$

$$\ldots, x_5, x_1, x_3, x_5, x_1, x_3, x_5, \ldots.$$

Da $\mathring{k}(x_1, x_3, x_5)$ eine Invariante der Umsetzung $\mathfrak{u}^2$ ist, hängt $\mathring{k}(x_{2\nu+1}, x_{2\nu+3}, x_{2\nu+5})$ nicht von ν ab. Wir können diese Invariante konstant annehmen:

$$(17)\qquad \mathring{k}(x_1, x_3, x_5) = \bar{k}^{-1} = \text{konstant},$$

und erniedrigen dadurch die Stufe der Argumentkette von drei auf zwei. Die spezielle Wahl der Konstanten als $\bar{k}^{-1}$ erweist sich für später als zweckmäßig. Die Umkehrfunktion $x_5(x_1, x_3; \bar{k})$ zu (17) liefert die erzeugende Relation einer zyklischen Umsetzung zweiter Stufe. Wir berechnen diese Relation.

Die Auflösung von Gleichung (17) nach x_5 ergibt zunächst

$$(17')\qquad x_1^4 + x_3^4 + x_5^4 - 2(x_1^2x_3^2 + x_3^2x_5^2 + x_5^2x_1^2) + \bar{k}^4x_1^4x_3^4x_5^4 - 2\bar{k}^2x_1^2x_3^2x_5^2(x_1^2 + x_3^2 + x_5^2) + 4(\bar{k}^2+1)\,x_1^2x_3^2x_5^2 = 0.$$

Das ist dieselbe Gleichung, welche von L. Euler [16] als allgemeines Integral $x_5(x_1, x_3) =$ konstant der elliptischen Differentialgleichung

$$(18) \qquad \frac{dx_1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-\bar{k}^2x_1^2)}} + \frac{dx_3}{\sqrt{(1-x_3^2)(1-\bar{k}^2x_3^2)}} = 0$$

gefunden wurde.

Aus Gleichung (17′) erhält man weiter

$$x_5 = \frac{\pm x_1\sqrt{(1-x_3^2)(1-\bar{k}^2x_3^2)} \pm x_3\sqrt{(1-x_1^2)(1-\bar{k}^2x_1^2)}}{1-\bar{k}^2x_1^2x_3^2}.$$

Hier sind vorläufig noch vier Vorzeichenkombinationen denkbar. Wir werden aber die Zweige der Funktion $x_5(x_1, x_3; \bar{k})$ fixieren, so daß $x_5(x_1, x_3; \bar{k})$ eine eindeutige Funktion von zwei Veränderlichen über der Riemannschen Fläche mit Windungspunkten erster Ordnung in ± 1 und $\pm \bar{k}^{-1}$ wird, indem wir x_1, x_3 und x_5 als Argumente der zu u gehörigen Argumentkette auffassen und die dort fixierten Blattzahlen ε_i einführen. Es ist nämlich $x_4 = \bar{k}x_1$ und $x_6 = \bar{k}x_3$, so daß wir mit $\eta_i = \pm 1$ ansetzen können:

$$x_5 = \frac{\eta_1 x_1 \varepsilon_3\sqrt{1-x_3^2}\,\varepsilon_6\sqrt{1-\bar{k}^2x_3^2} + \eta_2 x_3 \varepsilon_1\sqrt{1-x_1^2}\,\varepsilon_4\sqrt{1-\bar{k}^2x_1^2}}{1-\bar{k}^2x_1^2x_3^2}.$$

Wenn wir hierin

$$\varepsilon_4\sqrt{1-\bar{k}^2x_1^2} = -\frac{\bar{k}}{x_2}\left[x_1\varepsilon_3\sqrt{1-x_3^2}\,\varepsilon_2\sqrt{1-x_2^2} + x_3\varepsilon_1\sqrt{1-x_1^2}\right],$$

$$\varepsilon_6\sqrt{1-\bar{k}^2x_3^2} = -\frac{\bar{k}}{x_2}\left[x_3\varepsilon_1\sqrt{1-x_1^2}\,\varepsilon_2\sqrt{1-x_2^2} + x_1\varepsilon_3\sqrt{1-x_3^2}\right]$$

einsetzen und

$$1-\bar{k}^2x_1^2x_3^2 = \frac{x_1^2+x_3^2-2x_1^2x_3^2+2x_1x_3\varepsilon_1\sqrt{1-x_1^2}\,\varepsilon_2\sqrt{1-x_2^2}\,\varepsilon^3\sqrt{1-x_3^2}}{x_1^2+x_3^2-2x_1^2x_3^2+x_1^2x_2^2x_3^2+2x_1x_3\varepsilon_1\sqrt{1-x_1^2}\,\varepsilon_2\sqrt{1-x_2^2}\,\varepsilon_3\sqrt{1-x_3^2}}$$

berücksichtigen, folgt eindeutig $\eta_1 = \eta_2 = -1$. Also erhalten wir

$$(19) \qquad x_5 = -\frac{x_1\varepsilon_3\varepsilon_6\sqrt{(1-x_3^2)(1-\bar{k}^2x_3^2)} + x_3\varepsilon_1\varepsilon_4\sqrt{(1-x_1^2)(1-\bar{k}^2x_1^2)}}{1-\bar{k}^2x_1^2x_3^2}$$

mit $\bar{k} = \frac{x_4}{x_1} = \frac{x_2}{x_5} = \frac{x_6}{x_3}$. In gleicher Weise ergeben sich aus (17′) durch ähnliche Rechnungen eindeutig die Beziehungen

$$(19') \qquad \varepsilon_5\sqrt{1-x_5^2} = \frac{\varepsilon_1\sqrt{1-x_1^2}\,\varepsilon_3\sqrt{1-x_3^2} - x_1x_3\varepsilon_4\sqrt{1-\bar{k}^2x_1^2}\,\varepsilon_6\sqrt{1-\bar{k}^2x_3^2}}{1-\bar{k}^2x_1^2x_3^2}$$

und

$$(19'') \qquad \varepsilon_2\sqrt{1-\bar{k}^2x_5^2} = \frac{\varepsilon_4\sqrt{1-\bar{k}^2x_1^2}\,\varepsilon_6\sqrt{1-\bar{k}^2x_3^2} - \bar{k}^2x_1x_3\varepsilon_1\sqrt{1-x_1^2}\,\varepsilon_3\sqrt{1-x_3^2}}{1-\bar{k}^2x_1^2x_3^2}.$$

Das System der Gleichungen (19), (19′) und (19″) erzeugt eine zyklische Umsetzung zweiter Stufe der Ordnung drei über der zweiblättrigen Riemannschen Fläche mit Windungspunkten erster Ordnung in ± 1 und $\pm \bar{k}^{-1}$. Diese Umsetzung ist das Quadrat der

Umsetzung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks mit konstantem Modul. Die dieser Umsetzung zugeordnete Funktionalgleichung ist genau das Additionstheorem des elliptischen Integrals erster Gattung in der Jacobischen Normierung.

Um (19), (19′) und (19″) abzukürzen, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(20)\qquad \frac{x_1\varepsilon_3\varepsilon_6\sqrt{(1-x_3^2)(1-k^2x_3^2)}+x_3\varepsilon_1\varepsilon_4\sqrt{(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)}}{1-k^2x_1^2x_3^2} \doteq \psi(x_1, x_3; k),$$

$$(20')\qquad \frac{\varepsilon_1\sqrt{1-x_1^2}\,\varepsilon_3\sqrt{1-x_3^2}-x_1x_3\varepsilon_4\sqrt{1-k^2x_1^2}\,\varepsilon_6\sqrt{1-k^2x_3^2}}{1-k^2x_1^2x_3^2} \doteq \overline{\psi}(x_1, x_3; k),$$

$$(20')\qquad \frac{\varepsilon_4\sqrt{1-k^2x_1^2}\,\varepsilon_6\sqrt{1-k^2x_3^2}-k^2x_1x_3\varepsilon_1\sqrt{1-x_1^2}\,\varepsilon_3\sqrt{1-x_3^2}}{1-k^2x_1^2x_3^2} \doteq \overline{\overline{\psi}}(x_1, x_3; k)$$

mit

$$k=\frac{x_{\nu+3}}{x_\nu}=\frac{x_{\nu+5}}{x_{\nu+2}}=\frac{x_{\nu+1}}{x_{\nu+4}}.$$

Das hat zur Folge:

$$(21)\qquad \overline{\psi}^2+\psi^2=1,$$

$$(21')\qquad \overline{\overline{\psi}}^2+k^2\psi^2=1$$

und

$$(19)^*\qquad x_{\nu+4}=-\psi(x_\nu, x_{\nu+2};\ k)\quad \text{für } k=\frac{x_{\nu+3}}{x_\nu}=\frac{x_{\nu+5}}{x_{\nu+2}}=\frac{x_{\nu+1}}{x_{\nu+4}},$$

bzw.

$$=-\psi\left(x_\nu, x_{\nu+2};\ \frac{1}{k}\right)\quad \text{für } k=\frac{x_\nu}{x_{\nu+3}}=\frac{x_{\nu+2}}{x_{\nu+5}}=\frac{x_{\nu+4}}{x_{\nu+1}},$$

$$(19')^*\qquad \varepsilon_{\nu+4}\sqrt{1-x_{\nu+4}^2}=\overline{\psi}(x_\nu, x_{\nu+2};\ k)\quad \text{für } k=\frac{x_{\nu+3}}{x_\nu}=\cdots,$$

$$\text{bzw. } =\overline{\psi}\left(x_\nu, x_{\nu+2};\ \frac{1}{k}\right)\quad \text{für } k=\frac{x_\nu}{x_{\nu+3}}=\cdots,$$

$$(19'')^*\qquad \varepsilon_{\nu+1}\sqrt{1-k^2x_{\nu+4}^2}=\overline{\overline{\psi}}(x_\nu, x_{\nu+2};\ k)\quad \text{für } k=\frac{x_{\nu+3}}{x_\nu}=\cdots,$$

bzw.

$$\varepsilon_{\nu+1}\sqrt{1-k^{-2}x_{\nu+4}^2}=\overline{\overline{\psi}}\left(x_\nu, x_{\nu+2};\ \frac{1}{k}\right)\quad \text{für } k=\frac{x_\nu}{x_{\nu+3}}=\cdots.$$

Für die sechs Argumente der Argumentkette von u erhält man mit

$$k=\frac{x_1}{x_4}=\frac{x_3}{x_6}=\frac{x_5}{x_2}$$

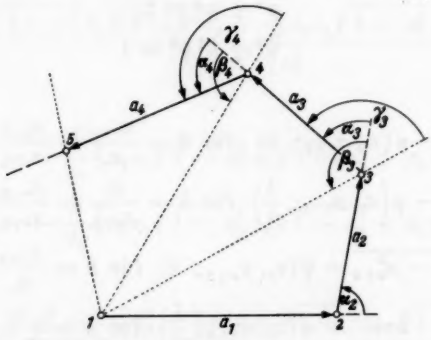
$$(10')\quad x_1, x_2, x_3=-\psi\left(x_1, x_2k;\ \frac{1}{k}\right),\ x_4=x_1k^{-1},\ x_5=x_2k,\ x_6=-\psi(x_1k^{-1}, x_2;\ k).$$

Die Umsetzung dritter Stufe der Ordnung sechs am schiefwinkligen sphärischen Dreieck ist in jeder Hinsicht das Analogon des Zyklus am Pentagramma Mirificum. Es liegt in der Natur der Sache, daß man verzweigte erzeugende Relationen zugrunde legen muß.

Es bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, dieselben Rechnungen für höhere sphärische Polygone durchzuführen. Um die Betrachtungen nicht zu komplizieren, werden wir uns auf konvexe sphärische Polygone auf der Einheitskugel beschränken, deren Seiten a_μ und Außenwinkel α_μ zwischen 0 und π liegen ($0<a_\mu, \alpha_\mu<\pi$ für $\mu=1, 2, \ldots, m$). Außerdem fixieren wir für diese Polygone einen bestimmten Durchlaufungssinn.

Jedes solche sphärische m-Eck besitzt ein eindeutig bestimmtes Polar-m-Eck, wenn wir zusätzlich als Pol einer Seite denjenigen der beiden Pole festlegen, von dem aus gesehen die Seite im mathematisch positiven Drehsinn durchlaufen wird. Das Polar-m-Eck besitzt die Seiten α_μ und die Außenwinkel a_μ. Das sphärische m-Eck ist durch $2m-3$ aufeinanderfolgende Stücke, z. B. $a_1, \alpha_2, a_2, \ldots, \alpha_{m-1}, a_{m-1}$, eindeutig bestimmt. $2m-2$ aufeinanderfolgende Stücke sind durch dieselbe Relation miteinander verknüpft. Diese Relation ist unabhängig davon, ob die Kette der $2m-2$ Stücke mit einer Seite oder mit einem Winkel beginnt, weil diese Relation sowohl für das m-Eck als auch für sein Polar-m-Eck gilt. Diese Relation zwischen $2m-2$ aufeinanderfolgenden Stücken ist erzeugende Relation einer zyklischen Umsetzung $(2m-3)$-ter Stufe der Ordnung $2m$. Wir werden diese Relation für ein beliebiges sphärisches m-Eck ausrechnen, indem wir das Polygon geschickt in Dreiecke zerlegen und die Formeln des sphärischen Dreiecks benutzen.

Wir beziehen uns auf die folgende schematische Figur, in welcher wir Großkreisbögen auf der Kugel als Strecken in der Zeichenebene veranschaulichen. Wir entnehmen dieser Figur nur die Lage der verschiedenen Stücke zueinander, während die metrischen Aussagen durch Rechnung begründet werden.



Es werden Hilfswinkel β_μ und γ_μ eingeführt.

$$\gamma_\mu = \pi - (\beta_\mu - \alpha_\mu), \qquad \mu = 3, 4, \ldots$$

$\overline{1\mu}$ bezeichne die Entfernung von 1 nach μ. Für die Hilfsgrößen

$$\xi_\mu = \sin \overline{1\mu} \sin \gamma_\mu, \quad \eta_\mu = \sin \overline{1\mu} \cos \gamma_\mu, \quad \zeta_\mu = \cos \overline{1\mu} \tag{22}$$

erhält man die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \xi_{\mu+1} &= (\eta_\mu \cos a_\mu + \zeta_\mu \sin a_\mu) \sin \alpha_{\mu+1} + \xi_\mu \cos \alpha_{\mu+1}, \\ \eta_{\mu+1} &= (\eta_\mu \cos a_\mu + \zeta_\mu \sin a_\mu) \cos \alpha_{\mu+1} - \xi_\mu \sin \alpha_{\mu+1}, \\ \zeta_{\mu+1} &= \zeta_\mu \cos a_\mu - \eta_\mu \sin a_\mu. \end{aligned} \tag{23}$$

Mit Hilfe des Gleichungssystems (23) kann man alle Relationen an einem beliebigen sphärischen m-Eck ableiten, welche nur die Seiten und Außenwinkel dieses m-Ecks enthalten, indem man die Größen $\xi_\mu, \eta_\mu, \zeta_\mu$ rekursiv bestimmt. Als Anfangsbedingung hat man zu setzen $\overline{12} = a_1$, $\gamma_2 = \alpha_2$, bzw. $\xi_1 = \eta_1 = 0$, $\zeta_1 = 1$. Soll sich das Polygon nach der Durchlaufung von m Seiten schließen, dann muß $\gamma_m = \pi$, $\overline{m1} = a_m$, $\beta_m = \alpha_m$, bzw. $\xi_{m+1} = \eta_{m+1} = 0$, $\zeta_{m+1} = 1$ gelten.

Neben der Relation, welche $2m-2$ aufeinanderfolgende Stücke miteinander verknüpft, existieren noch andere Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphä-

rischen m-Ecks, z. B. die Relationen zwischen $2m-2$ gegenüberliegenden Stücken. Insgesamt gibt es m verschiedene Relationen zwischen $2m-2$ Stücken, die man dadurch auseinanderhalten kann, daß man angibt, welchen Abstand in der natürlichen Reihenfolge die beiden nicht berücksichtigten Stücke voneinander haben. Auch diese Relationen lassen sich mit Hilfe der Rekursionsformeln (23) in einfacher Weise bestimmen. Es folgt eine Tabelle der Relationen für die niedrigsten Fälle $m = 3, 4$. Alle Gleichungen bleiben gültig, wenn man Seiten und Winkel in ihrer natürlichen Reihenfolge $\alpha_1, a_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, a_m$ zyklisch vertauscht.

$m = 3$:

$$(24') \qquad \sin\alpha_2 \operatorname{ctg}\alpha_3 + \sin a_2 \operatorname{ctg} a_1 + \cos\alpha_2 \cos a_2 = 0$$

$$(24'') \qquad \cos a_3 = \cos a_1 \cos a_2 - \sin a_1 \sin a_2 \cos\alpha_2$$

$$(24''') \qquad \sin a_1 \sin\alpha_2 = \sin\alpha_3 \sin a_3.$$

$m = 4$:

$$(25') \quad \left.\begin{aligned}&(\sin\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\alpha_2\sin\alpha_3\cos a_2)\operatorname{ctg}\alpha_4 + (\cos a_2\sin a_3 + \sin a_2\cos a_3\cos\alpha_3)\operatorname{ctg} a_1\\ &+ \sin a_2\sin\alpha_3\operatorname{ctg}\alpha_4\operatorname{ctg} a_1 + \cos\alpha_2\cos a_2\cos\alpha_3\cos a_3 - \sin\alpha_2\sin\alpha_3\cos a_3 - \cos\alpha_2\sin a_2\sin a_3\end{aligned}\right\} = 0$$

$$(25'') \qquad \begin{aligned}\cos a_4 = {}&\cos a_1(\cos a_2\cos a_3 - \sin a_2\sin a_3\cos\alpha_3) -\\ &- \sin a_1\cos\alpha_2(\sin a_2\cos a_3 + \cos a_2\sin a_3\cos\alpha_3) + \sin a_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\sin a_3\end{aligned}$$

$$(25''') \qquad \sin\alpha_4\sin a_4 = \sin a_1\sin\alpha_3(\sin\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_3 + \sin a_2\operatorname{ctg} a_1 + \cos\alpha_2\cos a_2)$$

$$(25^{\mathrm{IV}}) \qquad \cos a_1\cos a_2 - \sin a_1\sin a_2\cos\alpha_2 = \cos a_3\cos a_4 - \sin a_3\sin a_4\cos\alpha_4.$$

Ebenso wie im Falle $m = 3$ ergeben sich auch in den Fällen $m = 4, 5, \ldots$ jeweils aus der ersten Gleichung erzeugende Relationen zyklischer Umsetzungen. Durch die Transformation

$$\sin\alpha_\mu \doteq x_{2\mu-1}, \quad \sin a_\mu \doteq x_{2\mu},$$

$$\cos\alpha_\mu \doteq \varepsilon_{2\mu-1}\sqrt{1 - x_{2\mu-1}^2}, \quad \cos a_\mu \doteq \varepsilon_{2\mu}\sqrt{1 - x_{2\mu}^2} \quad \text{mit } \varepsilon_\nu = \pm 1$$

entsteht aus jeder dieser Gleichungen eine Relation der Form

$$\frac{x_{\mu+2m-3}}{\varepsilon_{\mu+2m-3}\sqrt{1 - x_{\mu+2m-3}^2}} \doteq \varphi^*\left(\frac{x_\mu}{\varepsilon_\mu}, \frac{x_{\mu+1}}{\varepsilon_{\mu+1}}, \ldots, \frac{x_{\mu+2m-4}}{\varepsilon_{\mu+2m-4}}\right),$$

aus welcher man das Argument $x_{\mu+2m-3} (0 < x_{\mu+2m-3} < 1)$ und seine Blattzahl $\varepsilon_{\mu+2m-3}$ in Abhängigkeit von den $2m-3$ Argumenten $x_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_{\mu+2m-4}$ und deren Blattzahlen $\varepsilon_\mu, \varepsilon_{\mu+1}, \ldots, \varepsilon_{\mu+2m-4}$ eindeutig bestimmen kann:

$$x_{\mu+2m-3} = +\sqrt{\frac{\varphi^{*2}}{1+\varphi^{*2}}}, \quad \varepsilon_{\mu+2m-3}\sqrt{1 - x_{\mu+2m-3}^2} = \frac{x_{\mu+2m-3}}{\varphi^*},$$

$$(26) \qquad \left(\frac{x_{\mu+2m-3}}{\varepsilon_{\mu+2m-3}}\right) \doteq \varphi\left(\frac{x_\mu}{\varepsilon_\mu}, \frac{x_{\mu+1}}{\varepsilon_{\mu+1}}, \ldots, \frac{x_{\mu+2m-4}}{\varepsilon_{\mu+2m-4}}\right).$$

Die durch (26) vermittelte Relation erzeugt eine Argumentkette, welche sich nach $2m$ Schritten zyklisch schließt. Damit ist bewiesen, daß man eine zyklische Umsetzung $(2m-3)$-ter Stufe der Ordnung $2m$ erhält.

Die zyklischen Eigenschaften am rechtwinkligen sphärischen Dreieck wurden von L. Schläfli [33] auf Orthoscheme in Räumen konstanter positiver Krümmung beliebiger Dimension verallgemeinert. W. A. Wythoff [35] behandelte unabhängig von Schläfli den Fall der Dimension drei. Wir beziehen uns auf eine Arbeit von H. S. M. Coxeter [12]

über denselben Gegenstand und benutzen die dort eingeführten Bezeichnungen zur Charakterisierung der Winkel und Seiten des Ortoschems.

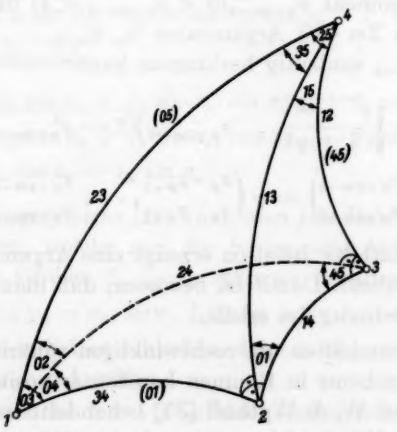
Ein dreidimensionales Orthoschem ist nach Schläfli ein Tetraeder im dreidimensionalen Raum konstanter positiver Krümmung, in welchem drei der vier Begrenzungsflächen aufeinander senkrecht stehen. Wir setzen die Krümmung durchweg gleich $+1$. Das allgemeine Orthoschem ist eine Verallgemeinerung des rechtwinkligen Dreiecks auf beliebige Dimensionszahlen. Das allgemeine Orthoschem im positiv gekrümmten Raum der Dimension m wird durch einen Streckenzug von m Strecken erzeugt, der so beschaffen ist, daß jede neu angehängte Strecke auf dem Unterraum senkrecht steht, welcher durch die vorhergehenden Strecken bestimmt ist.

Das m-dimensionale Orthoschem besitzt $\binom{m+3}{4}$ verschiedene, nicht entartete Stücke, d. h. Kanten und Winkel. Wir unterscheiden die verschiedenen Typen von Winkeln als Keilwinkel erster, zweiter, dritter usw. Ordnung. Ein Keilwinkel nullter Ordnung ist eine Kante. Ein Keilwinkel erster Ordnung ist ein Winkel zwischen zwei das Orthoschem begrenzenden Kanten (Flächenwinkel). Ein Keilwinkel zweiter Ordnung ist ein Winkel zwischen zwei das Orthoschem begrenzenden Flächen, d. h. rechtwinkligen Dreiecken. Ein Keilwinkel dritter Ordnung ist ein Winkel zwischen zwei das Orthoschem begrenzenden Unterorthoschemen der Dimension drei. Ein Keilwinkel $(m-1)$-ter Ordnung ist ein Winkel zwischen zwei das Orthoschem begrenzenden Unterorthoschemen der Dimension $m-1$. Die Keilwinkel $(m-1)$-ter Ordnung des m-dimensionalen Orthoschems sind die Keilwinkel schlechthin.

Jedes dieser Stücke wird nach Coxeter durch ein Zahlquadrupel

$$[rstu],\ 0 \leqq r < s < t < u \leqq m+2,$$

eindeutig festgelegt. Für $m = 3$ verwendet man zur Kennzeichnung der $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$ Stücke zweckmäßig Zahlpaare hk mit $0 \leqq h < k \leqq 5$ und $kh = \frac{\pi}{2} - hk$ gemäß der folgenden schematischen Figur:



Die Zahlpaare in runden Klammern (z. B. (01)) bezeichnen die Keilwinkel, d. h. die Winkel zwischen den Flächen, welche an diesen Kanten zusammenstoßen. Weiter werden noch die Bezeichnungen „Hauptkanten" für die Kanten 12, 23, 34, „Nebenkanten" für die Kanten 13, 24, 14 und „Hypotenuse" für die Hauptkante 23 benutzt. Den Zusammenhang zwischen den Zahlpaaren und den Zahlquadrupeln der allgemeinen Bezeichnung erkennt man an den Beispielen [0124] = 35, [1245] = 03.

Die Berechnung der Stücke eines beliebigen Orthoschems in Abhängigkeit von seinen Keilwinkeln geschieht nach Coxeter [12], S. 134-135 mit Hilfe der Klammersymbole (s, t), welche wir, um sie von den Zahlpaaren zu unterscheiden, durchweg mit runden Klammern und Komma schreiben. Wir übernehmen für diese Symbole die Rechengesetze

$$(27') \qquad (s, s) = 0,$$

$$(27'') \qquad (s, s+1) = 1,$$

$$(27''') \quad (s, t) = \begin{vmatrix} (s, s+2) & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & (s+1, s+3) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & (t-3, t-1) & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & (t-2, t) \end{vmatrix} \quad (\text{für } s < t-2),$$

$$(27^{\mathrm{IV}}) \qquad (r, s)(t, u) + (r, t)(u, s) + (r, u)(s, t) = 0$$

und die Darstellungen

$$(28) \qquad \cos^2 [rstu] = \frac{(r, s)(t, u)}{(r, t)(s, u)}, \quad \sin^2 [rstu] = \frac{(r, u)(s, t)}{(r, t)(s, u)}.$$

Daraus erhält man für die Keilwinkel $[s(s+1)(s+2)(s+3)]$ die Beziehung

$$(28') \quad \operatorname{cosec}^2 [s(s+1)(s+2)(s+3)] = (s, s+2)(s+1, s+3) \quad (s = 0, 1, \ldots, (m-1)).$$

Die m Keilwinkel sind also auf die $m+1$ Klammersymbole $(0, 2)$, $(1, 3), \ldots,$ $(m, m+2)$ zurückgeführt, von denen man umgekehrt eines willkürlich (etwa $= 1$) wählen und die übrigen m durch die m Keilwinkel darstellen kann. Nach Gleichung $(27''')$ läßt sich aber jedes andere Klammersymbol (s, t) mit $t - s > 2$ durch diese $m+1$ Klammersymbole ausdrücken, also auch durch die m Keilwinkel, und man erhält mit Hilfe der Gleichungen (28) ein beliebiges Stück am Orthoschem in Abhängigkeit von den Keilwinkeln.

Für $m = 3$ ergibt die Rechnung folgende Darstellungen für die $\operatorname{tg}^2 hk = t_{hk}$:

Keilwinkel:

$$t_{45} = (0,3) = (0,2)(1,3) - 1 \doteq t_1,$$
$$t_{05} = (1,4) = (1,3)(2,4) - 1 \doteq t_2,$$
$$t_{01} = (2,5) = (2,4)(3,5) - 1 \doteq t_3;$$

Hauptkanten:

$$t_{12} = \frac{t_1 t_2 t_3 - 1 - t_1 - t_3}{t_1(1 + t_2)},$$

$$t_{23} = \frac{t_2(t_1 t_2 t_3 - 1 - t_1 - t_3)}{1 + t_2},$$

$$t_{34} = \frac{t_1 t_2 t_3 - 1 - t_1 - t_3}{t_3(1 + t_2)};$$

Nebenkanten:

$$t_{13} = \frac{t_1 t_2 t_3 - 1 - t_1 - t_3}{1 + t_1},$$

$$t_{14} = \frac{t_1 t_2 t_3 - 1 - t_1 - t_3}{(1 + t_1)(1 + t_3)},$$

$$t_{24} = \frac{t_1 t_2 t_3 - 1 - t_1 - t_3}{1 + t_3};$$

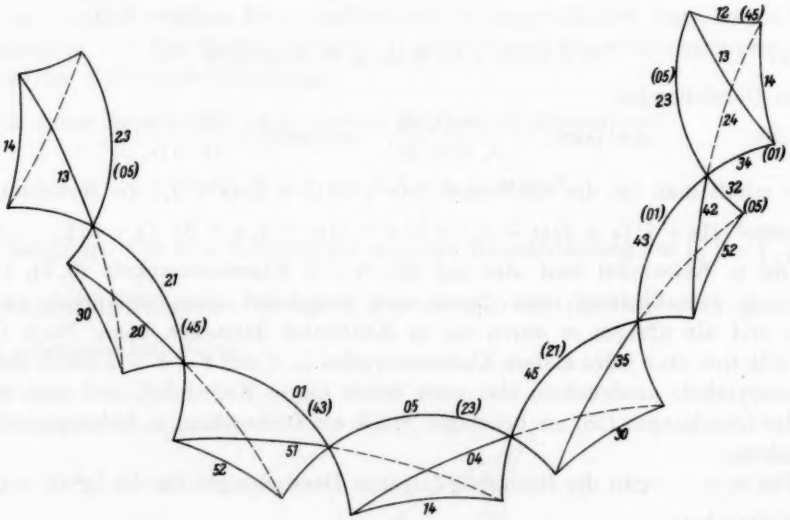
Flächenwinkel:

$$t_{02} = \frac{t_2 t_3 - 1}{1 + t_2}, \qquad t_{15} = \frac{t_1 t_2 - 1}{1 + t_1},$$

$$t_{03} = t_2 t_3 - 1, \qquad t_{25} = t_1 t_2 - 1,$$

$$t_{04} = \frac{t_2 t_3 - 1}{1 + t_3}, \qquad t_{35} = \frac{t_1 t_2 - 1}{1 + t_2}.$$

Indem man die Kanten des Orthoschems über einen der Endpunkte der Hypotenuse hinaus verlängert und zu $\frac{\pi}{2}$ ergänzt, erhält man ein Nachbarorthoschem, welches aus denselben Stücken bzw. deren Komplementen aufgebaut ist. Die Stücke des Nachbarorthoschems sind gegenüber den Stücken des Ausgangsorthoschems permutiert. Setzt man diese Konstruktion fort, dann entsteht eine zyklische Kette von Orthoschemen, die beim dreidimensionalen Orthoschem nach sechs Schritten wieder zu einem kongruenten Orthoschem führt. Die Kette schließt sich erst nach zwölf Schritten, denn nach sechs Schritten kommt man zwar zu einem kongruenten Orthoschem, dieses liegt aber, wenn man den dreidimensionalen Raum konstanter positiver Krümmung als Begrenzung der vierdimensionalen Einheitskugel in den vierdimensionalen euklidischen Raum einbettet, diametral zum Ausgangsorthoschem. (Man vgl. hierzu J. Böhm [8].)



Diese schematische Figur ist im dreidimensionalen Raum mit konstanter Krümmung + 1 zu denken. Die unsichtbaren Kanten sind unterbrochen gezeichnet. Die restlichen, nicht angezeichneten Stücke erhält man, wenn man berücksichtigt, daß die 15 Stücke in sechs rechtwinkligen Dreiecken angeordnet sind (vier Flächendreiecke und zwei nichtentartete Auffangdreiecke an den Endpunkten der Hypotenuse). In jedem dieser Dreiecke bilden die fünf zugehörigen Stücke einen Fünferzyklus. Diese sechs Fünferzyklen können beim Übergang zum Nachbarorthoschem nicht zerstört werden. Sie werden nur in ihrer Lage am Orthoschem zyklisch vertauscht. Jedes Stück des Orthoschems gehört zu genau zwei solchen Fünferzyklen, und jeder Fünferzyklus hat mit jedem der fünf anderen Fünferzyklen genau ein Stück gemeinsam. Jeder dieser Fünferzyklen ist durch zwei seiner Stücke eindeutig bestimmt.

Aus der Figur erkennt man, daß die 15 Stücke des Orthoschems in drei Untermengen gleichliegender Stücke zerfallen[6]). Gleichliegende Stücke in der Orthoschemkette sind z. B. die Keilwinkel und die Hauptkanten, bzw. deren Komplemente, welche in der Reihenfolge 45, 05, 01, 21, 23, 43 als Hypotenusen in den Gliedern der Orthoschemkette auftreten. Sie bilden ebenso wie die Stücke 35, 04, 51, 20, 13, 42 einen Sechserzyklus gleichliegender Stücke, während die restlichen drei Stücke 30, 14, 52 zu einem Dreierzyklus Anlaß geben. Die Stücke jedes dieser drei Zyklen liefern in ihrer natürlichen Anordnung je eine Argumentkette für eine zyklische Umsetzung dritter Stufe mit den Ordnungen sechs, sechs, drei beziehungsweise. Mit Hilfe der Darstellungen aller Stücke durch die Keilwinkel und unter Berücksichtigung von $t_{kh} = t_{hk}^{-1}$ erhält man die folgenden zyklischen Umsetzungen mit den zugehörigen Argumentketten:

$$-\operatorname{tg}^2 45 \doteq x_1, \quad -\operatorname{tg}^2 05 \doteq x_2, \quad -\operatorname{tg}^2 01 \doteq x_3,$$
$$-\operatorname{tg}^2 21 \doteq x_4, \quad -\operatorname{tg}^2 23 \doteq x_5, \quad -\operatorname{tg}^2 43 \doteq x_6;$$

$$(29) \qquad \mathfrak{u}_1: \quad x_{\nu+3} = \frac{x_\nu(x_{\nu+1}-1)}{1-x_\nu-x_{\nu+2}+x_\nu x_{\nu+1}x_{\nu+2}} \curvearrowright x_{\nu+6} = x_\nu,$$

$$x_1, x_2, x_3, \frac{x_1(x_2-1)}{1-x_1-x_3+x_1x_2x_3}, \frac{x_2(1-x_1-x_3+x_1x_2x_3)}{x_2-1}, \frac{x_3(x_2-1)}{1-x_1-x_3+x_1x_2x_3}, x_1, \ldots;$$

$$-\operatorname{tg}^2 35 \doteq x_1, \quad -\operatorname{tg}^2 04 \doteq x_2, \quad -\operatorname{tg}^2 51 \doteq x_3,$$
$$-\operatorname{tg}^2 20 \doteq x_4, \quad -\operatorname{tg}^2 13 \doteq x_5, \quad -\operatorname{tg}^2 42 \doteq x_6;$$

$$(30) \qquad \mathfrak{u}_2: \quad x_{\nu+3} = \frac{1-x_\nu+x_\nu x_{\nu+1}x_{\nu+2}}{x_\nu x_{\nu+1}x_{\nu+2}} \curvearrowright x_{\nu+6} = x_\nu,$$

$$x_1, x_2, x_3, \frac{1-x_1+x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3}, \frac{1-x_1x_2+x_1x_2x_3}{1-x_1+x_1x_2x_3}, \frac{1}{1-x_1x_2+x_1x_2x_3}, \quad x_1, \ldots;$$

$$-\operatorname{tg}^2 30 \doteq x_1, \quad -\operatorname{tg}^2 14 \doteq x_2, \quad -\operatorname{tg}^2 52 \doteq x_3;$$

$$\mathfrak{u}_3: \quad x_{\nu+3} = x_\nu; \qquad x_1, x_2, x_3, x_1, \ldots.$$

Die durch die Relation (30) erzeugte zyklische Umsetzung dritter Stufe der Ordnung sechs ($\mathfrak{u}_2$) ist ein Beispiel für eine nicht selbstumkehrbare zyklische Umsetzung. Durch Transformation mit einer beliebigen linear gebrochenen Funktion $l(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$, erhält man aus den zyklischen Umsetzungen $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ zwei dreiparametrige Scharen äquivalenter zyklischer Umsetzungen. Die Potenzen der zyklischen Umsetzungen $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ ergeben zyklische Umsetzungen der Ordnungen drei und zwei gemäß den folgenden Ketten von Orthoschemstücken:

45, 01, 23; 05, 21, 43; 45, 21; 05, 23; 01, 43;
35, 51, 13; 04, 20, 42; 35, 20; 04, 13; 51, 42.

Diese Unterzyklen beleuchten die „Verwandtschaft" der verschiedenen Orthoschemstücke zueinander. Die Funktion

$$(31) \quad \frac{1-x_1-x_3+x_1x_2x_3}{x_2-1} = \frac{\operatorname{tg}^2 45}{\operatorname{tg}^2 21} = \frac{\operatorname{tg}^2 23}{\operatorname{tg}^2 05} = \frac{\operatorname{tg}^2 01}{\operatorname{tg}^2 43} = \frac{x_1}{x_4} = \frac{x_5}{x_2} = \frac{x_3}{x_6} \doteq k(x_1, x_2, x_3)$$

[6]) Hierauf und auf entsprechende Phänomene in höheren Dimensionen hat mich Herr Dr. J. Böhm, Jena, aufmerksam gemacht.

ist eine Kovariante der zyklischen Umsetzung $\mathfrak{u}_1$:

$$k(x_2, x_3, x_4) \doteq \mathfrak{u}_1[k(x_1, x_2, x_3)] = \frac{1}{k(x_1, x_2, x_3)}. \tag{32}$$

Wenn die Kovariante $k(x_1, x_2, x_3)$ eingeführt wird, erhält man für die Argumentkette von $\mathfrak{u}_1$:

$$x_1, x_2, x_3, x_1 k^{-1}, x_2 k, x_3 k^{-1}, x_1, \ldots.$$

Ebenso wie bei der zyklischen Umsetzung am schiefwinkligen sphärischen Dreieck kann man auch hier durch die Festsetzung $k(x_1, x_2, x_3) =$ konstant die Stufe der Umsetzung $\mathfrak{u}_1$ von drei auf zwei reduzieren und erhält für $(\mathfrak{u}_1^2)_{k=\text{konstant}} \doteq \mathfrak{u}_{1,k}^2$ die Argumentkette

$$x_1, x_3, x_5 = k\,\frac{1 + k - x_1 - x_3}{k - x_1 x_3}, \quad x_7 = x_1, \ldots,$$

bzw. für $\mathfrak{u}_{1,k^{-1}}^2$ die Argumentkette

$$x_2, x_4, x_6 = \frac{1 + k - x_2 - x_4}{k(1 - k x_2 x_4)}, \quad x_8 = x_2, \ldots.$$

Die Schläflische Sechserkette von dreidimensionalen Orthoschemen ist die natürliche Verallgemeinerung der Fünferkette von rechtwinkligen sphärischen Dreiecken am Pentagramma Mirificum. Dieselbe Konstruktion der Ergänzung der Kanten, welche von einem Endpunkt einer Hypotenuse ausgehen, zu $\frac{\pi}{2}$ führt auch in jeder höheren Dimension m zu einem Nachbarorthoschem und zu einer zyklischen Kette von Orthoschemen, welche nach $m + 3$ Schritten kongruente Orthoscheme enthält. Die Untermengen gleichliegender Stücke geben wieder Anlaß zu zyklischen Umsetzungen, deren Stufe gleich m und deren Ordnung gleich $m + 3$ oder ein Teiler von $m + 3$ ist. Man erhält zu einem vorgegebenen Stück $[rstu]$, $0 \leqq r < s < t < u \leqq m + 2$, des m-dimensionalen Orthoschems die Untermenge der mit diesem Stück in der Orthoschemkette gleichliegenden Stücke, wenn man $[rstu]$ modulo $m + 3$ zyklisch abändert. Die gleichliegenden Stücke in der Anordnung

$$[rstu],\ [(r+1)(s+1)(t+1)(u+1)], \ldots, [(r+\nu)(s+\nu)(t+\nu)(u+\nu)], \ldots \tag{33}$$

bilden eine Argumentkette für eine zyklische Umsetzung, wenn man zusätzlich beim Durchlaufen der Kette immer dann zu $\frac{\pi}{2}$ ergänzt, wenn die größte der vier Zahlen kongruent null modulo $m + 3$ wird, und wenn man die natürliche Reihenfolge der vier Zahlen gemäß der Gleichung

$$[r_1 r_2 r_3 0] = \frac{\pi}{2} - [0 r_1 r_2 r_3] \quad \text{für } 1 \leqq r_1 < r_2 < r_3 \leqq m + 2 \tag{34}$$

wiederherstellt. Man vergleiche hierzu J. Böhm [9], II, 5. Beispiele solcher zyklischer Argumentketten sind die folgenden:

$m = 3$

$$[0123],\ [1234],\ [2345],\ \frac{\pi}{2} - [0345],\ [0145],\ \frac{\pi}{2} - [0125],\ [0123], \ldots$$

$$[0235],\ \frac{\pi}{2} - [0134],\ \frac{\pi}{2} - [1245],\ [0235], \ldots$$

$m = 4$

$$[0123],\ [1234],\ [2345],\ [3456],\ \frac{\pi}{2} - [0456],\ [0156],\ \frac{\pi}{2} - [0126],\ [0123], \ldots$$

$$[0234],\ [1345],\ [2456],\ \frac{\pi}{2} - [0356],\ [0146],\ \frac{\pi}{2} - [0125],\ \frac{\pi}{2} - [1236],\ [0234], \ldots$$

$$[0124],\ [1235],\ [2346],\ \frac{\pi}{2} - [0345],\ \frac{\pi}{2} - [1456],\ [0256],\ \frac{\pi}{2} - [0136],\ [0124], \ldots$$

$$[0134],\ [1245],\ [2356],\ \frac{\pi}{2} - [0346],\ [0145],\ [1256],\ \frac{\pi}{2} - [0236],\ [0134], \ldots$$

$$[0135],\ [1246],\ \frac{\pi}{2} - [0235],\ \frac{\pi}{2} - [1346],\ [0245],\ [1356],\ \frac{\pi}{2} - [0246],\ [0135], \ldots$$

Diese Tabelle zeigt, daß sich die $\binom{7}{4} = 35$ Stücke des vierdimensionalen Orthoschems in fünf Zyklen zu je sieben Stücken anordnen. Zu jedem dieser sieben Stücke gehört eine zyklische Umsetzung vierter Stufe der Ordnung sieben, deren erzeugende Relation man aus der Darstellung aller Stücke durch die Keilwinkel abliest. Z. B. ergibt sich für den ersten dieser fünf Zyklen mit

$$-\operatorname{tg}^2[0123] \doteq x_1, \quad -\operatorname{tg}^2[1234] \doteq x_2, \quad -\operatorname{tg}^2[2345] \doteq x_3, \quad -\operatorname{tg}^2[3456] \doteq x_4,$$
$$-\operatorname{tg}^2[0456] \doteq x_5^{-1}, \quad -\operatorname{tg}^2[0156] \doteq x_6, \quad -\operatorname{tg}^2[0126] \doteq x_7^{-1}$$

die zyklische Argumentkette

$$x_1, x_2, x_3, x_4,$$
$$x_5 = \frac{(1 - x_1 x_2)(1 - x_3)}{(1 - x_1 x_2)(1 - x_3 x_4) - (1 - x_1)(1 - x_4)},$$
$$x_6 = \frac{(1 - x_2 x_3)\,[(1 - x_1 x_2)(1 - x_3 x_4) - (1 - x_1)(1 - x_4)]}{(1 - x_2)(1 - x_3)},$$
$$x_7 = \frac{(1 - x_2)(1 - x_3 x_4)}{(1 - x_1 x_2)(1 - x_3 x_4) - (1 - x_1)(1 - x_4)},$$
$$x_8 = x_1, \ldots.$$

Die Relation

$$x_{\nu+4} = \frac{(1 - x_\nu x_{\nu+1})(1 - x_{\nu+2})}{(1 - x_\nu x_{\nu+1})(1 - x_{\nu+2} x_{\nu+3}) - (1 - x_\nu)(1 - x_{\nu+3})} \tag{35}$$

erzeugt eine selbstumkehrbare zyklische Umsetzung vierter Stufe der Ordnung sieben.

§ 8. Weitere Funktionalgleichungen über zyklischen Umsetzungen.

Geleitet von dem Beispiel der Funktionalgleichung zweiter Stufe für den Dilogarithmus, wollen wir jeder zyklischen Umsetzung u eine lineare Funktionalgleichung zuordnen, indem wir ansetzen:

$$x_{\nu+s} = \varphi(x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_{\nu+s-1}) \tag{1}$$

ist erzeugende Relation einer zyklischen Umsetzung s-ter Stufe der Ordnung n. Zu lösen ist die Funktionalgleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) = 0, \quad \textit{identisch in } x_1, x_2, \ldots, x_s. \tag{2}$$

Wir fragen nach analytischen Lösungen $f(x)$ über der Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$, auf welcher die durch (1) festgelegte zyklische Umsetzung definiert ist. Die Funktionalgleichung (2) nennen wir die der zyklischen Umsetzung (1) *zugeordnete lineare Funktionalgleichung* oder auch die *lineare Funktionalgleichung über der zyklischen Umsetzung* (1).

Die Funktionalgleichung

$$f(x) + f(-x) = 0, \quad \text{identisch in } x,$$

ist ein triviales Beispiel für eine solche Funktionalgleichung erster Stufe über einer zyklischen Umsetzung. Neben der Funktionalgleichung (0.3) findet sich als weiteres nichttriviales Beispiel das Additionstheorem des elliptischen Integrals erster Gattung

$$(3) \qquad \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \doteq f(x):$$

$$(4) \qquad f(x_1) + f(x_2) + f[-\psi(x_1, x_2; k)] = 0,$$

identisch in x_1, x_2. Diese Funktionalgleichung ist der durch die Relationen (7. 19) bis (7. 19″) definierten zyklischen Umsetzung zugeordnet [7]).

Man gewinnt die allgemeine differenzierbare Lösung direkt aus der Funktionalgleichung (4), indem man diese partiell nach x_1 differenziert:

$$f'(x_1) - f'[-\psi(x_1, x_2; k)] \frac{\partial}{\partial x_1} \psi(x_1, x_2; k) = 0,$$

identisch in x_1, x_2. Mit $x_1 = 0$ erhält man

$$f'(-x_2) = \frac{f'(0)}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-k^2x_2^2)}} = f'(x_2);$$

also ist (3) bis auf einen konstanten Faktor die allgemeine differenzierbare Lösung der Funktionalgleichung (4).

Die zyklischen Eigenschaften gelten nicht nur für das Additionstheorem des elliptischen Integrals erster Gattung, sondern für jedes Additionstheorem, welches eine Lösung besitzt, die im Großen eindeutig umkehrbar ist. Aus

$$(0.6) \qquad f(x_1) + f(x_2) + f[\varphi(x_1, x_2)] = 0,$$

identisch in x_1, x_2, schließt man nämlich durch Iteration

$$f(x_2) + f[\varphi(x_1, x_2)] + f[\varphi\{x_2, \varphi(x_1, x_2)\}] = 0,$$

identisch in x_1, x_2. Indem man diese Gleichung von (0.6) subtrahiert, erhält man

$$f(x_1) = f[\varphi\{x_2, \varphi(x_1, x_2)\}].$$

Daraus folgt $\varphi\{x_2, \varphi(x_1, x_2)\} = x_1$, wenn man links und rechts nach dem Argument auflöst und die Voraussetzung benutzt. Wir fassen zusammen in folgendem Satz:

(5) *Die Funktionalgleichung zweiter Stufe für den Eulerschen Dilogarithmus und jedes Additionstheorem der Form* (0.6), *welches eine Lösung besitzt, die im Großen eindeutig umkehrbar ist, können einheitlich als lineare Funktionalgleichungen über zyklischen Umsetzungen verstanden werden.*

---

[7]) Der Zusammenhang mit den Formeln der sphärischen Trigonometrie wurde bereits von *J. L. Lagrange* [22] entdeckt. Eine ausführliche Darstellung findet sich bei *H. Durège* [14], Abschnitt VII, 4. Auflage.

Die zyklischen Eigenschaften der Funktion $\varphi(x_1, x_2)$ in der Funktionalgleichung (0.6) lassen sich auch aus den assoziativen Eigenschaften der Funktion $\psi(x_1, x_2)$ in der Funktionalgleichung (0.2′) ableiten. Wenn die Bedingungen (1. 1′) bis (1. 1^{V}) erfüllt sind, folgt für die Funktion

$$j[\psi(x_1, x_2)] = (x_1 \circ x_2)^{-1} = x_1^{-1} \circ x_2^{-1} \doteq \varphi(x_1, x_2) \tag{6}$$

die Eigenschaft:

$$\varphi\{x_2, \varphi(x_1, x_2)\} = x_2^{-1} \circ [(x_1 \circ x_2)^{-1}]^{-1} = x_2^{-1} \circ x_2 \circ x_1 = x_1.$$

Assoziative und zyklische Eigenschaften der Argumentfunktionen hängen also auf das engste miteinander zusammen.

Unser Ansatz, welcher zyklische Umsetzungen in Beziehung zu linearen Funktionalgleichungen setzt, ist insofern noch unbefriedigend, als die zyklischen Bedingungen nicht ausreichen, um die Existenz solcher analytischer Lösungen der zugeordneten Funktionalgleichung zu gewährleisten, welche nicht identisch verschwinden. Wir werden nämlich im folgenden ein Beispiel für eine Funktionalgleichung über einer zyklischen Umsetzung kennenlernen, welche als analytische Lösung nur die identisch verschwindende zuläßt. Dazu betrachten wir die Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) + f(z) + f\left[\frac{x(y-1)}{1-x-z+xyz}\right] + f\left[\frac{y(1-x-z+xyz)}{y-1}\right] \\ + f\left[\frac{z(y-1)}{1-x-z+xyz}\right] = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

identisch in x, y, z, über der zyklischen Umsetzung (7. 29) und führen die folgenden Abkürzungen ein:

$$\frac{x(y-1)}{1-x-z+xyz} \doteq u, \quad \frac{y(1-x-z+xyz)}{y-1} \doteq v, \quad \frac{z(y-1)}{1-x-z+xyz} \doteq w. \tag{8}$$

Wir folgen dem Abelschen Lösungsverfahren, welches durch Differentiation und Elimination die Lösung der Funktionalgleichung auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zurückführt. Differenzieren wir die Funktionalgleichung (7) partiell nach x und ersetzen wir die unabhängigen Veränderlichen x, y, z gemäß den Gleichungen

$$\frac{u(v-1)}{1-u-w+uvw} = x, \quad \frac{v(1-u-w+uvw)}{v-1} = y, \quad \frac{w(v-1)}{1-u-w+uvw} = z \tag{9}$$

durch u, v, w, so ergibt sich

$$(x-1)\,f'(x) = (w-1)\left[\frac{u-1}{v-1}\,f'(u) + vf'(v) - wf'(w)\right], \tag{10}$$

identisch in u, v, w. Dann differenzieren wir noch einmal, und zwar partiell nach u. Es entsteht

$$x^2[f'(x) + (x-1)\,f''(x)] + u^2[f'(u) + (u-1)\,f''(u)] = 0,$$

identisch in x, u. Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned} x^2[f'(x) + (x-1)\,f''(x)] &= \text{konstant} = 0, \\ f'(x) + (x-1)\,f''(x) &= 0, \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{A}{1-x}, \quad A \ldots \text{konstant}. \tag{11}$$

Jede Lösung der Funktionalgleichung (10) für $f'(x)$, welche noch einmal stetig differenzierbar ist, gestattet also eine Darstellung (11). Diese Darstellung liefert aber nur dann eine Lösung, wenn $A = 0$ ist, wie man durch Einsetzen in die Gleichung (10) bestätigt. Also ist $f'(x) = 0$ und $f(x) = \text{konstant} = 0$, identisch in x.

$f(x) = 0$, identisch in x, ist die einzige analytische (bzw. zweimal stetig differenzierbare) Lösung der Funktionalgleichung (7).

§ 9. Zyklische Strukturen allgemeinerer Art.

Auch für die Argumente der Funktionalgleichung

$$(0.7) \qquad \sum_{i=1}^{p+1} f(x_i) + \sum_{k=1}^{p} f[\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})] = 0,$$

identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, gelten gewisse zyklische Eigenschaften, welche wir aber nicht mehr mit dem bisherigen Begriff der zyklischen Umsetzung erfassen können.

Wir setzen wieder voraus, daß die Funktionalgleichung (0.7) p linear unabhängige analytische[2]) Lösungen $f_l(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, p)$ besitzt, deren p Jacobische Umkehrfunktionen $\lambda_k(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ im Großen p-wertig fixiert sind. Dann folgt durch Auflösung des Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{p} f_l[\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})] = -\sum_{i=1}^{p+1} f_l(x_i), \qquad l = 1, 2, \ldots, p,$$

nach den Argumenten φ_k

$$(1) \qquad (\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})) \overset{(p)}{=} \left(\lambda_k \left\{-\sum_{i=1}^{p+1} f_1(x_i), \ldots, -\sum_{i=1}^{p+1} f_p(x_i)\right\}\right).$$

Die Funktionen φ_k sind also symmetrische Funktionen in den $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$. Aus (1) erhält man weiter unter Benutzung der Funktionalgleichung (0.7) und der Abkürzung $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \doteq \varphi_i$

$$(2) \qquad (\varphi_k(x_2, \ldots, x_{p+1}, \varphi_1)) \overset{(p)}{=} \left(\lambda_k \left\{f_1(x_1) + \sum_{i=2}^{p} f_1(\varphi_i), \ldots, f_p(x_1) + \sum_{i=2}^{p} f_p(\varphi_i)\right\}\right) \overset{(p)}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{pmatrix}.$$

Da die $2p + 1$ Argumente $x_1, \ldots, x_{p+1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_p$ völlig gleichberechtigt in die Funktionalgleichung (0.7) eingehen, kann man mit demselben Recht auf der linken Seite von (1) als Argumente von φ_k auch beliebige $p + 1$ andere Argumente aus diesem $(2p + 1)$-tupel einsetzen. Wir wählen $p + 1$ verschiedene aus den gegebenen $2p + 1$ Argumenten $x_1, \ldots, x_{p+1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_p$ aus und bezeichnen sie mit $y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}$ und die restlichen p Argumente mit $y'_1, y'_2, \ldots, y'_p$. Dann folgt genau wie in (2)

$$(3) \qquad (\varphi_k(y_1, y_2, \ldots, y_{p+1})) \overset{(p)}{=} (y'_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Im Falle $p = 1$ gaben wir dieser Eigenschaft die Formulierung: $\varphi_1(x_1, x_2)$ erzeugt eine selbstumkehrbare zyklische Umsetzung zweiter Stufe der Ordnung drei. Die Relation (3) verallgemeinert diese Eigenschaft auf die Fälle $p > 1$. An die Stelle einer erzeugenden Relation im Falle $p = 1$ treten p gleichberechtigte durch die Funktionen $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ vermittelte Relationen.

Die Verallgemeinerung der zyklischen Eigenschaften eines Systems von Argumenten einer linearen Funktionalgleichung durch die Relationen (3) bezieht sich auf diejenigen zyklischen Umsetzungen, deren Ordnung um eine Einheit größer ist als ihre Stufe. Die Relation (3) deutet an, welche Strukturen man zu erwarten hat, wenn man den zyklischen Umsetzungen, deren Ordnung die Stufe um mehr als eine Einheit übersteigt, wie z. B. den zyklischen Umsetzungen des Pentagramma Mirificum (Ordnung 5, Stufe 2), in gleicher Weise allgemeinere Strukturen an die Seite stellen will. Sie weist auf die Notwendigkeit hin, eine Erweiterung des Begriffes der Umsetzung in der Richtung auf „Umsetzungen mit mehreren erzeugenden Relationen" vorzunehmen. Es ist zu vermuten, daß sich solche Strukturen bei der Fortführung der Theorie der linearen Funktionalgleichungen einstellen werden.

Ebenso wie im Falle $p = 1$ folgen die zyklischen Eigenschaften der Argumentfunktionen $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ in der Funktionalgleichung (0.7) auch aus den assoziativen Eigenschaften der Argumentfunktionen $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ in der zugehörigen Funktionalgleichung (0.2). Wir setzen voraus, daß die Verknüpfungen $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = \overset{k}{\bigcirc}(x_1 x_2 \cdots x_{p+1})$ eine kommutative p-wertige Gruppe definieren. Dann bilden wir

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad & j_k\{\psi_1(x_1, \ldots, x_{p+1}), \ldots, \psi_p(x_1, \ldots, x_{p+1})\} \\
&= \overset{k}{\ominus}\{\overset{1}{\bigcirc}(x_1 \cdots x_{p+1}) \cdots \overset{p}{\bigcirc}(x_1 \cdots x_{p+1})\} \\
&= \overset{k}{\ominus}(x_1 \cdots x_{p+1}) \\
&= \overset{k}{\bigcirc}\{\overset{1}{\ominus}(x_1 \cdots x_p) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_1 \cdots x_p) \overset{1}{\ominus}(x_{p+1}) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_{p+1})\} \\
&\doteq \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}).
\end{aligned}
$$

Setzen wir $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \doteq x'_k$ für $k = 1, 2, \ldots, p$, dann folgt unter Benutzung der Relation (4. 19)

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_k(x'_1, \ldots, x'_p, x_{p+1})) \\
&\overset{(p)}{=} (\overset{k}{\bigcirc}\{\overset{1}{\ominus}(x'_1 \cdots x'_p) \cdots \overset{p}{\ominus}(x'_1 \cdots x'_p) \overset{1}{\ominus}(x_{p+1}) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_{p+1})\}) \\
&\overset{(p)}{=} (\overset{k}{\bigcirc}\{\overset{1}{\bigcirc}(x_1 \cdots x_{p+1}) \cdots \overset{p}{\bigcirc}(x_1 \cdots x_{p+1}) \overset{1}{\ominus}(x_{p+1}) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_{p+1})\}) \\
&\overset{(p)}{=} (\overset{k}{\bigcirc}\{x_1 \cdots x_p \overset{1}{\bigcirc}[x_{p+1} \overset{1}{\ominus}(x_{p+1}) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_{p+1})] \cdots \overset{p}{\bigcirc}[x_{p+1} \overset{1}{\ominus}(x_{p+1}) \cdots \overset{p}{\ominus}(x_{p+1})] \\
&\overset{(p)}{=} (\overset{k}{\bigcirc}\{x_1 \cdots x_p e\}) \\
&\overset{(p)}{=} (x_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir

$$
(5)\qquad (\varphi_k(x_1, x_2,, \ldots, x_{p+1})) \overset{(p)}{=} (x'_k) \frown (\varphi_k(x'_1,. \ldots, x'_p, x_{p+1}) \overset{(p)}{=} (x_k).
$$

Durch Iteration folgt hieraus die Relation (3) mit beliebiger Auswahl der $y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}$.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor W. Maier, Jena, habe ich für die stete Förderung dieser Arbeit im Ansatz und bei der Durchführung durch zahlreiche Hinweise und Ratschläge zu danken. Ebenfalls danke ich Herrn Professor J. Aczél, Debrecen, für wertvolle kritische Bemerkungen und Herrn Professor W. Brödel, Jena, für die mir zuteil gewordene Unterstützung.

Literaturverzeichnis.

[1] *N. H. Abel*, Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable, lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables, Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang 1, Bind 1, Christiania 1823 oder Oeuvres I, Christiania 1881, 1—10.

[2] *N. H. Abel*, Recherches des fonctions de deux quantités variables indépendantes x et y, telles que $f(x, y)$, qui ont la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique de z, x et y, Crelles Journal **1** (1826) oder Oeuvres I, Christiania 1881, 61—65.

[3] *N. H. Abel*, Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes, Oeuvres I, Christiania 1881, 145—211, insbesondere 204—211.

[4] *N. H. Abel*, Note sur la fonction $\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$, Oeuvres II, Christiania 1881, 189—193

[5] *J. Aczél*, Sur les opérations définies pour nombres réels, Bull. Soc. Math. de France **76** (1949), 136—172.

[6] *J. Aczél-H. Kiesewetter*, Über die Reduktion der Stufe bei einer Klasse von Funktionalgleichungen, Publ. math., **5** (1958), 348—363.

[7] *W. Blaschke-G. Bol*, Geometrie der Gewebe, Berlin 1938, 265.

[8] *J. Böhm*, Über die Spezialfälle bei der Inhaltsmessung in Räumen konstanter Krümmung, Wiss. Zeitschr. der Fr.-Schiller-Univ. Jena **5** (1955/56), Math.-Naturw. Reihe, Heft 1/2, 157—164.

[9] *J. Böhm*, Untersuchung des Simplexinhaltes in Räumen konstanter Krümmung, Dissertation Jena 1957.

[10] *N. Bourbaki*, Eléments de mathématique IV, 1. partie, livre II, chap. I, Structures algébriques, deuxième édit., Act. scient. et industr. 934—1144 (1951), 7.

[11] *C. Carathéodory*, Über die Abbildungen, die durch Systeme von analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen erzeugt werden, Math. Zeitschr. **34** (1932), 762.

[12] *H. S. M. Coxeter*, On Schläfli's generalization of Napier's Pentagramma Mirificum, Bull. of the Calcutta Math. Soc. **28** (1936), 123—144.

[13] *W. Dörnte*, Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff, Math. Zeitschr. **29** (1929), 1—19.

[14] *H. Durège*, Theorie der elliptischen Funktionen, 4. Aufl., Leipzig 1887, Abschn. VI und VII.

[15] *L. Euler*, De summatione serierum in hac forma contentarum $\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^6}{36} +$ etc (1779), Mém. de l'acad. des sciences de St.-Pétersbourg **3** (1809/10), 1811, 26—42 oder Opera omnia (1) XI, Comment. anal. ad theoriam serierum infinitarum pertinentes, vol. tertium, sectio altera, 117—138.

[16] *L. Euler*, Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi de comparatione arcuum ellipsis, Novi comment. acad. scient. Petropolitanae **7** (1758/59), 1761, 3—48 oder Opera omnia (1) XX, Comment. anal. ad theoriam integralium ellipticorum pertinentes, vol. primus, 153—200, inbes. 161.

[17] *C. F. Gauß*, Pentagramma-Fragmente, Werke III, Göttingen 1876, 484.

[18] *M. Ghermănescu*, Ecuaţii functionale lineare, Bul. Ştiinţ. Acad. Rep. Pop. Rom., Secţ. de ştiinţe mat. şi fiz. III (1951), 245—259.

[19] *A. Göpel*, Entwurf einer Theorie der Abelschen Transcendenten erster Ordnung, Crelles Journal **35** (1847), 277—312 oder Ostwald's Klassiker **67**, Leipzig 1895.

[20] *C. G. J. Jacobi*, Considerationes generales de transcendentibus Abelianis, Crelles Journal **9** (1832), 394—403 oder Werke II, Berlin 1882, 5—16.

[21] *H. Kiesewetter*, Eine Bemerkung über partielle Differentiationen bei N. H. Abel, Publ. math. **5** (1958), 265—268.

[22] *J. L. Lagrange*, Théorie des fonctions analytiques, Oeuvres IX, Paris 1881, chap. XI, 127—141.

[23] *W. Maier*, Pyramidenmessung durch Dilogarithmen, Ber. über die Math.-Tagung in Tübingen, Tübingen 1946, 104—106.

[24] *W. Maier*, Inhaltsmessung im R_3 fester Krümmung, Archiv der Math. **5** (1954), 266—273.

[25] *W. Maier*, Analytische Funktionalgleichungen, Nachr. der Österr. Math. Ges. — Intern. Math. Nachr. **47/48** (1957), 41.

[26] *J. Napier*, Mirifici logarithmorum canonis descriptio, Edinburgh 1614, lib. ii, cap. iv.

[27] *W. F. Osgood*, Lehrbuch der Funktionentheorie I, 3. Aufl., Leipzig-Berlin 1920.

[28] *W. F. Osgood*, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1. Lieferung, Leipzig 1924, Kap. I, § 5, S. 12.

[29] *E. L. Post*, Polyadic groups, Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 2, 208—350.

[30] *B. Riemann*, Theorie der Abelschen Functionen, Crelles Journal **54** (1857) oder Ges. Werke 1, Kap. VI, 88—142.

[31] *L. J. Rogers*, On function sum theorems, connected with the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **4** (1907), 169—189.

[32] *G. Rosenhain*, Abhandlung über die Funktionen zweier Variabler mit vier Perioden, Mém. des savants IX (1851) oder Ostwald's Klassiker **65**, Leipzig 1895.

[33] *L. Schläfli*, Theorie der vielfachen Kontinuität, insbesondere § 27, Neue Denkschrift der Schweiz. Naturforsch. Ges. **38**, 1 (1901), 1—237 oder Ges. math. Abhandlungen 1, Basel 1950.

[34] *K. Weierstraß*, Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten, Werke IV, Berlin 1902.

[35] *W. A. Wythoff*, The rule of Neper in the four dimensional space, Akad. van Wet. Amsterdam, Proc. Sect. of Sci., **9** (1907), 529—534.

Eingegangen 8. Oktober 1959.

Zur zyklischen Struktur gewisser Funktionalgleichungen.

Von *W. Maier* und *G. Wutzler* in Jena.

Die algebraische Struktur linearer Funktionalgleichungen der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{k} F(t_j) = C,$$

in denen die k Argumente t_j Funktionen von s unabhängigen Variablen $x, y, z, \ldots$ sind und C eine Konstante ist, wurde in [1] untersucht. Es treten häufig zwischen den Argumenten solcher Funktionalgleichungen zyklische Verknüpfungen auf, wie sie sich auch bei manchen geometrischen Problemen finden (z. B. Pentagramma mirificum von Gauß). In [1] wurde zur genauen Beschreibung der zyklischen Bindungen zwischen den k Argumenten t_j der Begriff der „zyklischen Umsetzung" eingeführt, wenn zwischen den Argumenten t_j eine Relation der Form

$$t_n = \varphi(t_{n-1}, \ldots, t_{n-s}) \tag{1}$$

besteht und dabei n alle ganzen Zahlen durchläuft und die Indizes der t_j modulo k zu nehmen sind. (1) heißt die erzeugende Relation der zyklischen Umsetzung, s ihre Stufe und k ihre Ordnung. Für allgemeinere Funktionalgleichungen der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{k} (a + b\delta_j)\, F(t_j) = C,$$

in denen δ_j die Werte ± 1 annehmen kann und a, b Konstanten bezeichnen, braucht man zur Beschreibung der zyklischen Eigenschaften der Argumente t_j mehr als eine den Argumentzyklus erzeugende Relation. Für solche zyklischen Strukturen wird die Bezeichnung „zyklische Umsetzungen mit mehreren erzeugenden Relationen" vorgeschlagen. In dieser Note soll ein Beispiel für eine Funktionalgleichung angegeben werden, deren zyklische Argumentkette durch zwei erzeugende Relationen erzeugt wird.

$$\begin{aligned} t_n &= \varphi_j(t_{n-1}, \ldots, t_{n-s}) \quad (\mathrm{mod}\ k) \\ j &= 1 \text{ für } n \equiv q(p) \\ j &= 2 \text{ für } n \not\equiv q(p) \text{ mit } 0 \leqq q < p,\ p \mid k. \end{aligned} \tag{1'}$$

Die Funktionen $\varphi_j(t_{n-1}, \ldots, t_{n-s})$ sind in unserem Beispiel eindeutige analytische Funktionen von s Veränderlichen über der komplexen Vollebene.

Ein Beispiel für (1) findet sich bei Rogers [3]:

$$\sum_{j=1}^{5} R(t_j) = \frac{\pi^2}{2},\ t_n = \frac{1 - t_{n-2}}{1 - t_{n-2}t_{n-1}} \quad (\mathrm{mod}\ 5) \tag{2}$$

mit

$$R(z) = -\frac{1}{2}\int_0^z \left[\frac{\log(1-t)}{t} + \frac{\log t}{1-t}\right] dt.$$

Für die Funktion $R(z)$ gelten die Eulerschen Funktionalgleichungen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} R(z) + R[l_1(z)] &= \frac{\pi^2}{6}, \\ R(z) + R[l_2(z)] - \frac{\pi i}{2}\log z &= \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

$l_1(z) = 1 - z$ und $l_2(z) = \frac{1}{z}$ erzeugen eine Gruppe linearer Substitutionen der Ordnung 6.

Unterwirft man die Argumente von (2) der Transformation

$$t_1' = t_1;\ t_2' = t_2;\ t_3' = \frac{t_5 - 1}{t_5};\ t_4' = \frac{t_3 - 1}{t_3};\ t_5' = t_4,$$

so erhält man mit Hilfe von (3) eine Funktionalgleichung der Form $\sum_{j=1}^{5} R(t_j') = \varepsilon$, in der ε eine Funktion der t_j' ist, die nur logarithmische und rationale Terme enthält. Schreibt man diese Funktionalgleichung mit anderen Argumenten t_j'' unter der Nebenbedingung $t_5' = t_5''$, so erhält man durch Kombination beider Funktionalgleichungen eine Funktionalgleichung dritter Stufe, die sich in anderer Form in [2] findet:

$$R(w_1) + R(w_2) - R(w_3) - R(w_4) + R(w_5) + R(w_6) - R(w_7) - R(w_8) = \varepsilon^*.$$

Dabei wurde

$$w_1 = t_1';\ w_2 = t_2';\ w_3 = t_1'';\ w_4 = t_2'';\ w_5 = t_3';\ w_6 = t_4';\ w_7 = t_3'';\ w_8 = t_4''$$

gesetzt.

Führt man den oben skizzierten Beweis ausführlich durch und setzt man $w_1 = x$, $w_2 = y$, $w_3 = z$, so ergibt sich die Argumentkette der w_j in folgender Form:

$$x;\ y;\ z;\ \frac{xy}{z};\ y\,\frac{x-1}{1-y};\ x\,\frac{y-1}{1-x};\ xy\,\frac{z-1}{z-xy};\ \frac{z-xy}{z-1}.$$

Man prüft leicht nach, daß zwischen den w_j folgende zyklische Umsetzung 3. Stufe der Ordnung 8 mit 2 erzeugenden Relationen besteht:

$$(1'')\qquad \left.\begin{cases} w_n = \dfrac{w_{n-2}\,w_{n-3}}{w_{n-1}} & \text{für } n \equiv 0\ (2), \\ w_n = \dfrac{w_{n-1}\,w_{n-2} - w_{n-3}}{1 - w_{n-3}} & \text{für } n \equiv 1\ (2) \end{cases}\right\} \pmod 8.$$

Man kann insgesamt 6 verschiedene Darstellungen dieser Formeln angeben, indem man alle w_n den Substitutionen $w_n' = l_k(w_n)$ unterwirft ($k = 1, \ldots, 6$). Man erhält dann die transformierten zyklischen Umsetzungen

$$w_n' = l_k\{\varphi_j[l_k^{-1}(w_{n-1}'), \ldots, l_k^{-1}(w_{n-s}')]\},$$
$$j = 1 \text{ für } n \equiv 0\ (2);\ j = 2 \text{ für } n \equiv 1\ (2).$$

Bemerkenswert ist nun, daß diese transformierten Umsetzungen Argumentketten erzeugen, die aus der oben angeführten durch gewisse zugeordnete Permutationen der

Indizes der w_n hervorgehen. Es besteht nämlich eine isomorphe Zuordnung zwischen einer Gruppe von Permutationen und der oben erwähnten Substitutionsgruppe:

$$l_1(z) \sim (1,5)\ (3,7),$$
$$l_2(z) \sim (1,2)\ (3,4).$$

Literaturverzeichnis.

[1] *H. Kiesewetter*, Struktur linearer Funktionalgleichungen im Zusammenhang mit dem Abelschen Theorem; ds. Journ., **206** (961), 113—171.

[2] *W. Maier*, Aufgabe 357; Jahresber. DMV **58** (1956), 2.

[3] *L. J. Rogers*, On function sum theorems, connected with the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; Proc. London Math. Soc. (2) 4 (1907), 169.

Eingegangen 9. Oktober 1959.

On the Existence Proof of the Flow in the Boundary Layer in a Compressible Fluid. I[1]).

By *M. Z. v. Krzywoblocki* at East Lansing (Mich., U.S.A.).

Introduction.

In spite of more than fifty years of development, the fundamental aspects of the boundary layer theory are not yet known. Not enough theoretical work has been devoted to the investigation of the existence proofs of the flow itself in the boundary layer and of the solutions of the equations governing the flow in the boundary layer. The equations of the boundary layer are nonlinear partial differential equations which are usually associated with two-curve boundary conditions. In the theory of differential equations, one distinguishes two main processes: (1) formal construction of a solution satisfying the prescribed boundary conditions; (2) proof of existence and possibly of uniqueness. Up to the present time there did not exist any proof of the nature (2). It is with the view of trying to construct such a proof, at least in a particular case, that the present work was undertaken. The goal is the existence proof of the flow in the boundary layer in a compressible fluid; the flow is governed by the Navier-Stokes equations. The technique is as follows: At first the well-known Lichtenstein's existence proof of the flow in incompressible fluid in a domain D with the boundary S is extended to the domain of compressible fluid. It is shown that the flow exists although the characteristic functions are restricted (small in magnitude), i. e., the flow is finite but slow. Lichtenstein's proof does not fully reflect the actual conditions existing in physical phenomena, as the pressure p is prescribed only at one point. In the present generalization this restriction also appears, but it is shown that its significance is small. The velocities close to the body are small, hence the constructed proof is valid in the low subsonic part of the boundary layer. As the next step, the Blasius transformation of coordinates is applied and a two-dimensional flow is represented by means of an ordinary differential equation (one independent variable); using Weyl's solution, the author returns back to the original space, showing that the solution so obtained is embedded into the Lichtenstein proof, thus giving the first existence proof of the flow in the boundary layer. The second boundary condition at large y is automatically satisfied. This technique of the embedding process seems to be completely new and offers a possibility of application to other systems.

The main idea of the structure of the proof and all the detailed proofs in the text and in the appendices were done by the author of the present work. The formalism of the generalization of the Lichtenstein proof is contained in the dissertation of Mr. M. Saarlas, done under the direction and with the cooperation of the author. This is acknowledged by the author. The chapters on the boundary layer were done entirely by the author alone.

[1]) Parts II and III of this work will be published in later volumes of this journal. For references see the end of Part I.

1. Fundamental Concepts and Theorems.

1. 1. Newton's Potential. Poisson's Equation. Consider a three dimensional Cartesian coordinate system in a Euclidian space and domain Σ in it containing the points at infinity. Let Σ' denote the domain with the points at infinity excluded. Let $T \in \Sigma$ be a bounded region with boundary S and let $\mu(x, y, z)$ be a bounded integrable function in $T + S$. Let the region T be filled with gravitational mass with the density μ_1 at point $P(x_1, y_1, z_1) \in T$, $(\mu_1 \geqq 0)$. Then the volume integral

$$W(x_2, y_2, z_2) = \int_T \frac{\mu_1}{r}\, d\tau,$$

$$d\tau = dx_1 dy_1 dz_1,\ r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

represents the gravitational potential (*Newton's potential*) at $P(x_2, y_2, z_2)$. Under usually accepted conditions the function W is a continuous function in Σ. The first partial derivatives of W are components of the unit force at $P(x_2, y_2, z_2)$ and are also continuous in Σ. To insure the esistence of the second partial derivatives of W, one has to impose additional conditions on μ, i. e. Hölder conditions (hence called H-conditions).

Definition 1. A function $f(x_1, y_1, z_1)$ is said to *satisfy an H-condition* at $P(x_2, y_2, z_2)$ if there are three positive constants c, A, and λ such that

$$|f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)| \equiv |f(x, y, z)|_1^2 \leqq A r_{12}^{\lambda},$$
$$r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,\ \lambda < 1,$$

for all points $P(x_2, y_2, z_2)$ for which $r_{12} \leqq c$. If there is a region T in which $f(x, y, z)$ satisfies an H-condition at every point with the same c, A, and λ, then $f(x, y, z)$ is said to satisfy an H-condition uniformly in T.

H-condition is certainly satisfied when μ in a neighborhood of $P(x, y, z)$ has first continuous partial derivatives (Gauss' assumptions). This is the stronger condition. It can be shown then that in a neighborhood of $P(x, y, z)$ all second partial derivatives of W exist and are continuous. Thus, when Gauss' assumptions, or only an H-condition, are satisfied at $P(x, y, z) \in T$ the second partial derivatives of W exist, and it can be shown that they satisfy Poisson's equation

$$\nabla^2 W = -4\pi\mu.$$

On the boundary, in general, the second partial derivates of W do not exist since, passing from an exterior point of T to an interior point through the boundary S, where $\mu \neq 0$, $\nabla^2 W$ has a jump discontinuity of $-4\pi\mu$. Thus, in Σ the second partial derivatives represent only piecewise continuous functions. The behavior of W and its derivatives is summarized below in section 1. 6.

The problem in potential theory is to determine a continuous function W, if such a function exists, that satisfies the Poisson's equation in a region T. In order to find a nontrivial function satisfying the Poisson's equation, its behavior must be known on the boundary S, i. e., one is confronted with the boundary value problem. The function W is called the potential function.

1. 2. Definitions. In order to define a boundary value problem and to describe the behavior of certain potential functions and their derivatives, certain properties required of T and S must be stated. Consider the surface S as composed of elements each of which is a set of points, which, for some orientation of axes, admits a representation $z = z(x, y)$, $(x, y) \in R$, where R is a region of the x, y plane and where $z = z(x, y)$ is differentiable

a required number of times. If $z = z(x, y)$ has continuous first partial derivatives, i. e. S has piecewise continuous normals, then S is said to be *a surface of class A*. If $z = z(x, y)$ has continuous second partial derivatives, i. e. S has piecewise continuous curvature, then S is said to *belong to class B*. Furthermore, if for any two points on S the first derivatives of $z = z(x, y)$ satisfy a H-condition

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial x} z(x, y)\right|_1^2 \\ \left|\frac{\partial}{\partial y} z(x, y)\right|_1^2 \end{aligned}\right\} \leqq A r_{12}^{\lambda},$$

where A const., $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, then S is called *a surface of class Ah*. If the second partial derivatives of $z = z(x, y)$ satisfy a H-condition then S *belongs to class Bh*. A region T whose boundary consists of a finite number of surfaces of class A is called a region of class A. Similarly, if the boundary consists of a finite number of surfaces of class Ah, B, or Bh, then the region belongs to class Ah, B or Bh, respectively, [5], [7]. Similar definitions hold also for higher order derivatives.

Besides the form $z = z(x, y)$, the surface S may admit representation in the forms: $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ where x or y are regular functions of y and z, or x and z, respectively. Within the meaning of the following investigation either x and y, y and z, or x and z are called *the Gaussian parameters* of the surface S.

1. 3. Green's Function. Below are collected some significant properties of Green's function. Consider a bounded region T of class B and let $P(x, y, z)$ be a point in T. Let $g(x, y, z; x', y', z')$ be defined in T as a regular potential function of $P(x', y', z')$. It is continuous on the boundary S, and assumes there the value

$$-\frac{1}{r}, \quad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

The Green's function

$$G(x, y, z;\ x', y', z') = \frac{1}{r} + g(x, y, z;\ x', y', z'),$$

defined as a function at $P(x', y', z')$, is in every subregion of T that does not contain the point $P(x, y, z)$, a regular potential function which vanishes on the boundary S. Approaching the point $P(x, y, z)$, G becomes infinite as $\lim\limits_{r \to 0} \frac{1}{r}$.

Furthermore, on S the first partial derivatives and the normal derivative of G are continuous. In every subregion $\bar{T} + \bar{S} \leqq T + S$ that does not contain the point $P(x, y, z)$ the first partial derivatives of G are continuous and satisfy an H-condition. If T is a region of class Bh, in every subregion $\bar{T} + \bar{S} \leqq T + S$ the second partial derivatives of G are continuous and satisfy an H-condition. Similar theorems hold for higher order derivatives of G, [2], [5], [7].

1. 4. Solution of Poisson's Equation. Let T be a bounded region of class B, and let μ be a given function defined on $T + S$ that in T satisfies an H-condition. The solution of Poisson's equation

$$\nabla^2 W = -4\pi\mu,$$

where W satisfies the prescribed values $W(\sigma')$ on the boundary S, is the solution of this first boundary value problem and can be given by use of Green's function, G, as follows, [2], [7]:

$$W(x, y, z) = \int\limits_T G(x, y, z;\ x', y', z')\, \mu'\, d\tau' + \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \frac{\partial}{\partial n'} G(x, y, z;\ \sigma')\, W(\sigma')\, d\sigma'.$$

1. 5. Potential Single Layer and Double Layer. As will be shown later, it is advantageous to represent the solution of Poisson's equation as a sum of several potential functions: Newton's potential, potential single layer, and potential double layer. Newton's potential has already been defined in section 1. 1; the potential single layer and double layer will be defined next.

Let μ be a continuous point function on surface S and let $P(x, y, z)$ be a point not on S. For all such points $P(x, y, z)$ one defines:

Definition 2. $W_1(x, y, z) = \int\limits_S \frac{\mu(\sigma')}{r}\, d\sigma'$ is a *potential single layer.*

Definition 3. $W_2(x, y, z) = \int\limits_S \mu(\sigma') \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma'$ is a *potential double layer*, where $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$, [5], [7].

1. 6. Theorems on Potential Functions W, W_1, W_2. Below are stated, without proof, the more important properties of potential functions W, W_1, W_2.

1. 6. 1. *Newton's potential,* $W(x, y, z) = \int\limits_T \frac{\mu(\tau)}{r}\, d\tau$.

1. 6. 1. 1. Let $T \in \Sigma$ be a bounded region and let $\mu(\tau)$ be a bounded integrable function in Σ. Then W and its first derivatives are continuous in Σ. Furthermore, the first derivatives satisfy an H-condition

$$| D_1 W |_1^2 \leqq A \max | \mu(\tau) | r_{12}^{\lambda},$$

where A const., $0 < \lambda < 1$, $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, [3], [5], [7].

1. 6. 1. 2. Let T belong to class B and let $\mu(\tau)$ be a bounded continuous function satisfying an H-condition

$$| \mu(\tau) |_1^2 \leqq N r_{12}^{\lambda},$$

then the second partial derivatives of W exist in $T + S$, are continuous, and satisfy an H-condition

$$| D_2 W |_1^2 \leqq (\alpha_1 \max | \mu(\tau) | + \alpha_2 N)\, r_{12}^{\lambda},$$

where N, α_1, α_2 const., $0 < \lambda < 1$, $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, [3], [5], [7].

1. 6. 2. *Potential Single Layer,* $W_1(x, y, z) = \int\limits_S \frac{\mu(\sigma')}{r}\, d\sigma'$.

1. 6. 2. 1. Let S be a surface of class Ah and let $\mu(\sigma)$ be a bounded integrable function, then W_1 is continuous in Σ' and satisfies an H-condition

$$| W_1 |_1^2 \leqq \max | \mu(\sigma) | A r_{12}^{\lambda},$$

where A const., $0 < \lambda < 1$, $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, [3], [5], [7].

1. 6. 2. 2. Let S be a surface of class Bh and let $\mu(\sigma)$ satisfy an H-condition

$$| \mu(\sigma) |_1^2 \leqq B r_{12}^{\lambda},$$

then the first partial derivatives of W_1 exist in $T + S$ and in the exterior region of $T + S$. When crossing the boundary S, the first partial derivatives of W_1 are continuous in the direction of the tangent on S; otherwise, they have a jump discontinuity on S at σ_0:

$$\frac{\partial W_1^+}{\partial n_0} - \frac{\partial W_1^-}{\partial n_0} = -4\pi\mu(\sigma_0),$$

$$\frac{\partial W_1^+}{\partial n_0} + \frac{\partial W_1^-}{\partial n_0} = 2\int\limits_S \mu(\sigma') \frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{1}{r_0}\right) d\sigma'.$$

Moreover, the first partial derivatives satisfy an H-condition

$$| D_1 W_1 |_1^2 \leqq (C_1 B + C_2 \max | \mu(\sigma) |) r_{12}^{\lambda},$$

where B, C_1, C_2 const., $0 < \lambda < 1$, $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, [3], [5], [7].

1. 6. 2. 3. Let S be a surface of class Bh and let $\mu(\sigma)$ possess continuous first partial derivatives satisfying an H-condition

$$| D_1 \mu(\sigma) |_1^2 \leqq C r_{12}^{\lambda},$$

then the second partial derivatives of W_1 exist in $T + S$ and in the exterior region of $T + S$. When crossing the boundary S, the second partial derivatives are continuous in the direction of the tangent on S; otherwise, they have a jump discontinuity on S. Also, they satisfy an H-condition

$$| D_2 W_1 |_1^2 \leqq (c_3 C + c_4 \max | \mu(\sigma) |) r_{12}^{\lambda},$$

where C, c_3, c_4 const., $0 < \lambda < 1$, $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, [3], [5], [7].

1. 6. 3. *Potential Double Layer*, $W_2(x, y, z) = \int\limits_S \mu(\sigma') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r}\right) d\sigma'$.

1. 6. 3. 1. Let S be a surface of class Ah and let $\mu(\sigma)$ be a bounded integrable function, then W_2 is in $T + S$ and in the exterior region of $T + S$, a continuous function. When crossing the boundary S, W_2 has a jump discontinuity at points σ_0 where $\mu \neq 0$:

(A) $$W_2^+(\sigma_0) - W_2^-(\sigma_0) = 4\pi\mu(\sigma_0),$$

(B) $$W_2^+(\sigma_0) + W_2^-(\sigma_0) = 2 \int\limits_S \mu(\sigma') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r_0}\right) d\sigma'.$$

Moreover, W_2 satisfies an H-condition

$$| W_2 |_1^2 \leqq d_1 \max | \mu(\sigma) | r_{12}^{\lambda},$$

where d_1 const., $0 < \lambda < 1$, $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, [5], [7].

1. 6. 3. 2. Let S be a surface of class B and let $\mu(\sigma)$ possess continuous first partial derivatives satisfying an H-condition

$$| D_1 \mu(\sigma) |_1^2 \leqq B r_{12}^{\lambda},$$

then the first partial derivatives of W_2 exist in $T + S$, and in the exterior region of $T + S$, and satisfy an H-condition

$$| D_1 W_2 |_1^2 \leqq (d_2 B + d_3 \max | \mu(\sigma) |) r_{12}^{\lambda},$$

where B, d_2, d_3 const., $0 < \lambda < 1$, $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, [5], [7].

1. 6. 3. 3. Let S be a surface of class Bh and let $\mu(\sigma)$ possess second partial derivatives satisfying an H-condition

$$| D_2 \mu(\sigma) |_1^2 \leqq D r_{12}^{\lambda},$$

then the second partial derivatives of W_2 exist in $T + S$, and in the exterior region of $T + S$, and satisfy an H-condition

$$| D_2 W_2 |_1^2 \leqq (d_4 D + d_5 \max | \mu(\sigma) |) r_{12}^{\lambda},$$

where D, d_4, d_5 const., $0 < \lambda < 1$, $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)$, [2], [5], [7].

1. 6. 3. 4. Let S be a surface of class B and let $\mu(\sigma)$ satisfy an H-condition

$$| \mu(\sigma) |_1^2 \leqq A r_{12}^{\lambda}$$

where λ, A const., $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, for points (1, 2) on S, then W has, on S, the value

$$W_S = \tfrac{1}{2}(W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}),$$

and W_S has continuous first derivatives on S which satisfy an H-condition of the following form

$$\left| \frac{\partial W_S}{\partial m} \right|_1^2 \leqq a A r_{12}^\lambda,$$

where a, A, λ const. and m designates a tangential direction on S, [3].

1. 6. 3. 5. Let S be a surface of class Bh and let $\mu(\sigma)$ have continuous first partial derivatives which satisfy an H-condition

$$\left| \frac{\partial \mu(\sigma)}{\partial m} \right|_1^2 \leqq B r_{12}^\lambda,$$

where B, λ const., $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, then W_S has continuous second partial derivatives on S which satisfy an H-condition of the following form

$$\left| \frac{\partial^2 W_S}{\partial m^2} \right|_1^2 \leqq b B r_{12}^\lambda,$$

where b, B, λ const. and m designates a tangential direction on S. Similar theorems hold also for higher order derivatives [3].

1. 7. Behavior of the Solution of the First Boundary Value Problem at the Boundary. Consider the first boundary value problem as stated in Section 1. 4. Let $T \in \Sigma$ be a bounded region of class B and let $f(s)$ be the prescribed boundary values of the solution $W(x, y, z)$ on boundary S. Considering two points, s and t, on the boundary, and points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) not on the boundary, one can state the following theorems:

1. 7. 1. If $f(s)$ is continuous and satisfies an H-condition

$$| f(s) - f(t) | < A r_{st}^\lambda,$$

where A, λ const., $0 < \lambda < 1$, $r_{st}^2 = (x_s - x_t)^2 + (y_s - y_t)^2 + (z_s - z_t)^2$, then $W(x, y, z)$ is continuous in $T + S$ and satisfies an H-condition

$$| W(x, y, z) |_1^2 < c_1 A r_{12}^\lambda$$

where c_1 const., $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, [5].

1. 7. 2. If $f(s)$ and $\dfrac{df}{ds} \equiv f'(s)$ are continuous, and if $f'(s)$ satisfies an H-condition

$$| f'(s) - f'(t) | < B r_{st}^\lambda,$$

where B, λ const., $0 < \lambda < 1$, $r_{st}^2 = (x_s - x_t)^2 + (y_s - y_t)^2 + (z_s - z_t)^2$, then the first partial derivatives of $W(x, y, z)$ are continuous in $T + S$ and satisfy an H-condition

$$| D_1 W(x, y, z) |_1^2 < C_2 B r_{12}^\lambda,$$

where C_2 const., $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, [5].

1. 7. 3. Let $T \in \Sigma$ be a region of class Bh, and let $f(s)$, $f'(s)$, $f''(s)$ be continuous and, furthermore, let $f''(s)$ satisfy an H-condition

$$| f''(s) - f''(t) | < C r_{st}^\lambda,$$

where C, λ const., $0 < \lambda < 1$, $r_{st}^2 = (x_s - x_t)^2 + (y_s - y_t)^2 + (z_s - z_t)^2$, then the second partial derivatives of $W(x, y, z)$ are continuous in $T + S$ and satisfy an H-condition

$$| D_2 W(x, y, z) |_1^2 < c_3 C r_{12}^\lambda,$$

where c_3 const., $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$.

Similar theorems hold also for higher order derivatives, [5].

1. 8. Solution of the Fredholm Integral Equation. The solution of the Fredholm integral equation

$$p(\sigma^*) - \frac{1}{4\pi}\int_S r^* \frac{\partial^2 G}{\partial r^* \partial n}\, p(\sigma')\, d\sigma' = \Phi(\sigma^*) \tag{1. 8. 1}$$

appearing below is stated without proof. (1. 8. 1) has a solution if, and only if

$$\int g(\sigma)\, \Phi(\sigma)\, d\sigma = 0, \tag{1. 8. 2}$$

where $g(\sigma)$ is the solution of the adjoint homogeneous equation of (1. 8. 1)

$$g(\sigma') - \frac{1}{4\pi}\int_S g(\sigma^*) \frac{\partial^2 G(\sigma^*, \sigma')}{\partial r^* \partial n'}\, r^* d\sigma^* = 0.$$

The solution of the homogeneous equation of (1. 8. 1) is $p = \text{const}$. If the condition (1. 8. 2) is satisfied, then the solution of (1. 8. 1) is determined up to an additive constant and can be found in terms of the resolvent kernel $K(\sigma^*, \sigma')$ as ([6], 394—395, 404; [9], 66)

$$p(\sigma^*) = \Phi(\sigma^*) + \int_S K(\sigma^*, \sigma')\, \Phi(\sigma')\, d\sigma' + p^0, \quad p^0 = \text{const}.$$

2. Fundamental Equations.

The following set of Navier Stokes equations has been assumed to be fundamental in describing fluid flow in the domain of continuum.

Equations of motion:

$$\begin{aligned} \varrho \frac{du}{dt} = \varrho X - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{\mu}\nabla^2 u + \frac{\bar{\mu}}{3}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{2}{3}\theta \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x} + 2\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \\ + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \end{aligned} \tag{2. 1. 1}$$

$$\begin{aligned} \varrho \frac{dv}{dt} = \varrho Y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \bar{\mu}\nabla^2 v + \frac{\bar{\mu}}{3}\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{2}{3}\theta \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} + 2\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \\ + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{2. 1. 2}$$

$$\begin{aligned} \varrho \frac{dw}{dt} = \varrho Z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \bar{\mu}\nabla^2 w + \frac{\bar{\mu}}{3}\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{2}{3}\theta \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial z} + 2\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} \\ + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{2. 1. 3}$$

where

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \text{ (steady flow).}$$

Equation of continuity:

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0. \tag{2. 1. 4}$$

Equation of energy:

$$\varrho c_v\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \bar{p}\theta = k\nabla^2 T + \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z} + \bar{\mu}\Phi, \tag{2. 1. 5}$$

where

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\theta.$$

Equation of state:

$$\bar{p} = \varrho R T. \tag{2. 1. 6}$$

The reader should keep in his mind that the letter T denotes both the temperature and the region. There is no ambiguity in the text because of that.

3. Existence Proof.

3. 1. General. Consider a steady motion of a compressible fluid in a region $T \leqq \Sigma'$ bounded by a closed analytical regular surface S. The system of equations describing the flow is given in Chapter 2. It is necessary to postulate the following minimum requirements for the variables under consideration:

In $T + S$:

1. the velocity components u, v, w possess partial derivatives of first five orders in T and of first four orders in S;

2. the pressure $\bar{p}$ has partial derivatives of at least first four orders in T and of first three orders in S;

3. the temperature T, heat conductivity coefficient k, and viscosity coefficient $\bar{\mu}$ possess partial derivatives of at least first four orders in T and of first three orders in S;

4. the density ϱ has partial derivatives of at least first four orders in T and of first three orders in S;

5. the functions $\varrho u, \varrho v, \varrho w$ have partial derivatives of at least first four orders; approaching the boundary S, they take on the prescribed boundary values $\varphi(\sigma)$, $\psi(\sigma)$, $\chi(\sigma)$, respectively. φ, ψ, χ are continuous functions of Gaussian surface parameters of S, have partial derivatives of at least first two orders and satisfy

$$\int_S [\varphi \cos(n, x) + \psi \cos(n, y) + \chi \cos(n, z)]\, d\sigma = 0,$$

where n is the inner normal on S at point $\sigma = (x, y, z)$;

6. the function kT has partial derivatives of at least first four orders and approaching boundary S, takes on the prescribed boundary value π. π possesses partial derivatives of at least first three orders;

7. the components of force X, Y, Z possess partial derivatives of first three orders in T and of first two orders in S;

8. all the partial derivatives above exist and are continuous; those of the highest order satisfy an H-condition;

9. the Green's function, G, appearing in the proof and the properties of the solution of Poisson's equation are discussed in Appendix II.

3. 2. Equivalent System of Equations.

3. 2. 1. *Equation for Pressure.* Consider the equations of motion (2. 1. 1) to (2. 1. 3) in the following form as obtained from the original equations by dividing by $\bar{\mu}$ and multiplying by ϱ:

$$(3.\,2.\,1.\,1)\quad \alpha \frac{du}{dt} = \alpha X - \frac{\partial p}{\partial x} + \varrho \nabla^2 u + \frac{\varrho}{3}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{2}{3}\theta \frac{\partial \mu}{\partial x} + 2\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial \mu}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$(3.\,2.\,1.\,2)\quad \alpha \frac{dv}{dt} = \alpha Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \varrho \nabla^2 v + \frac{\varrho}{3}\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{2}{3}\theta \frac{\partial \mu}{\partial y} + 2\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial \mu}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$(3.\,2.\,1.\,3)\quad \alpha \frac{dw}{dt} = \alpha Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \varrho \nabla^2 w + \frac{\varrho}{3}\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{2}{3}\theta \frac{\partial \mu}{\partial z} + 2\frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial \mu}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

where

$$(3.2.1.4)\qquad \alpha = \frac{\varrho^2}{\bar{\mu}},\ \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\varrho}{\bar{\mu}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x},\ \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\varrho}{\bar{\mu}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y},\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\varrho}{\bar{\mu}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z},$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\varrho}{\bar{\mu}}\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x},\ \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\varrho}{\bar{\mu}}\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y},\ \frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{\varrho}{\bar{\mu}}\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial z}.$$

Differentiating (3. 2. 1. 1), (3. 2. 1. 2), (3. 2. 1. 3) with respect to x, y, z, respectively, and adding, one obtains

$$(3.2.1.5)\qquad \nabla^2 p = A,$$

where

$$\begin{aligned}(3.2.1.6)\quad A = {} & \frac{\partial(\alpha X)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha Z)}{\partial z} + \frac{4}{3}\varrho\nabla^2\theta - \frac{2}{3}\theta\nabla^2\mu \\ & + \left[\nabla^2 u + \frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\partial\varrho}{\partial x}\right] + \left[\nabla^2 v + \frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\partial\varrho}{\partial y}\right] \\ & + \left[\nabla^2 w + \frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\left[\frac{\partial\mu}{\partial z} + \frac{\partial\varrho}{\partial z}\right] + 2\left[\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}\frac{\partial w}{\partial z}\right. \\ & \left. + \frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2\mu}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] \\ & - \alpha\left[u\frac{\partial\theta}{\partial x} + v\frac{\partial\theta}{\partial y} + w\frac{\partial\theta}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right. \\ & \left. + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] \\ & - \left[\left(\frac{2}{\nu}\frac{\partial\varrho}{\partial x} - \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right. \\ & + \left(\frac{2}{\nu}\frac{\partial\varrho}{\partial y} - \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ & \left. + \left(\frac{2}{\nu}\frac{\partial\varrho}{\partial z} - \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],\end{aligned}$$

and

$$\nu = \frac{\bar{\mu}}{\varrho}.$$

The requirements on the derivatives of p, in (3. 2. 1. 5) are governed by two aspects: solution of (3. 2. 1. 5) which formally requires 3-rd continuous derivatives of u, v, w, and the form of (2. 1. 1) which requires the fourth derivatives of p and 5-th derivatives of u, v, w. The second, stronger condition will be enforced throughout the work. By use of (3. 2. 1. 5) one can write (3. 2. 1. 1) — (3. 2. 1. 3) as follows:

$$\begin{aligned}(3.2.1.7)\quad & \nabla^2\left(\varrho u - \frac{1}{2}xp\right) + \frac{1}{2}xA + \alpha X + 2\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\theta}{3}\right) \\ & + \frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\varrho}{3}\frac{\partial\theta}{\partial x} \\ & = u\nabla^2\varrho + \frac{\partial u}{\partial x}\left(2\frac{\partial\varrho}{\partial x} + \alpha u\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(2\frac{\partial\varrho}{\partial y} + \alpha v\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\left(2\frac{\partial\varrho}{\partial z} + \alpha w\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3.2.1.8)\quad & \nabla^2\left(\varrho v - \frac{1}{2}yp\right) + \frac{1}{2}yA + \alpha Y + 2\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\theta}{3}\right) \\ & + \frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\varrho}{3}\frac{\partial\theta}{\partial y} \\ & = v\nabla^2\varrho + \frac{\partial v}{\partial x}\left(2\frac{\partial\varrho}{\partial x} + \alpha u\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\left(2\frac{\partial\varrho}{\partial y} + \alpha v\right) + \frac{\partial v}{\partial z}\left(2\frac{\partial\varrho}{\partial z} + \alpha w\right),\end{aligned}$$

$$(3.2.1.9)\quad \nabla^2\left(\varrho w-\frac{1}{2}zp\right)+\frac{1}{2}zA+\alpha Z+2\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\theta}{3}\right)$$
$$+\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\varrho}{3}\frac{\partial\theta}{\partial z}$$
$$=w\nabla^2\varrho+\frac{\partial w}{\partial x}\left(2\frac{\partial\varrho}{\partial x}+\alpha u\right)+\frac{\partial w}{\partial y}\left(2\frac{\partial\varrho}{\partial y}+\alpha v\right)+\frac{\partial w}{\partial z}\left(2\frac{\partial\varrho}{\partial z}+\alpha w\right).$$

The equations (3. 2. 1. 7) — (3. 2. 1. 9) are in the form of Poisson's equations:

$$(3.2.1.10)\quad \begin{cases}\nabla^2(\varrho u-\frac{1}{2}xp)=-(\frac{1}{2}xA+B),\\ \nabla^2(\varrho v-\frac{1}{2}yp)=-(\frac{1}{2}yA+C),\\ \nabla^2(\varrho w-\frac{1}{2}zp)=-(\frac{1}{2}zA+D),\end{cases}$$

where B, C, and D are of the form

$$(3.2.1.11)\quad B=\alpha X+\frac{\varrho}{3}\frac{\partial\theta}{\partial x}+2\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\theta}{3}\right)+\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$-u\nabla^2\varrho-\frac{\partial u}{\partial x}\left(2\frac{\partial\varrho}{\partial x}+\alpha u\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\left(2\frac{\partial\varrho}{\partial y}+\alpha v\right)-\frac{\partial u}{\partial z}\left(2\frac{\partial\varrho}{\partial z}+\alpha w\right),$$

. . . . . .

. . . . . .

The equations (3. 2. 1. 10) will be solved by use of Green's function

$$G(\tau,\tau')\equiv G(x,y,z;x',y',z')$$

(see section 1. 4):

$$(3.2.1.12)\quad 4\pi\left(\varrho u-\frac{1}{2}xp\right)=\int_T G(\tau,\tau')\left(\frac{1}{2}x'A'+B'\right)d\tau'+\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,(\varrho u)'\,d\sigma'$$
$$-\frac{1}{2}\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,x'p'\,d\sigma',$$

$$(3.2.1.13)\quad 4\pi\left(\varrho v-\frac{1}{2}yp\right)=\int_T G(\tau,\tau')\left(\frac{1}{2}y'A'+C'\right)d\tau'+\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,(\varrho v)'\,d\sigma'$$
$$-\frac{1}{2}\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,y'p'\,d\sigma',$$

$$(3.2.1.14)\quad 4\pi\left(\varrho w-\frac{1}{2}zp\right)=\int_T G(\tau,\tau')\left(\frac{1}{2}z'A'+D'\right)d\tau'+\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,(\varrho w)'\,d\sigma'$$
$$-\frac{1}{2}\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,z'p'\,d\sigma',$$

where $\frac{\partial G(\tau,\sigma')}{\partial n'}$ is the inner normal derivative at $\sigma'\equiv(x',y',z')$ on boundary S. From (3. 2. 1. 5) one obtains, in the same manner,

$$(3.2.1.15)\quad 4\pi p=-\int_T G(\tau,\tau')\,A'\,d\tau'+\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,p'\,d\sigma',$$

whence, multiplying by x and dividing by 8π,

$$(3.2.1.16)\quad \frac{1}{2}xp=-\frac{1}{8\pi}\int_T G(\tau,\tau')\,A'x\,d\tau'+\frac{1}{8\pi}\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,p'x\,d\sigma'.$$

Substituting (3. 2. 1. 16) into (3, 2. 1. 12) and rearranging terms

$$(3.\,2.\,1.\,17)\quad \varrho u = \frac{1}{8\pi}\int\limits_T G(\tau,\tau')\,[(x'-x)\,A' + 2\,B']\,d\tau' + \frac{1}{8\pi}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n'}\,G(\tau,\sigma')\,(x-x')\,p'\,d\sigma' + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n'}\,G(\tau,\sigma')\,(\varrho u)'\,d\sigma'.$$

Similarly, one obtains equations for $\frac{1}{2}\,yp$ and $\frac{1}{2}\,zp$, which upon substitution into (3. 2. 1. 13) and (3. 2. 1. 14), respectively, give

$$(3.\,2.\,1.\,18)\quad \varrho v = \frac{1}{8\pi}\int\limits_T G(\tau,\tau')\,[(y'-y)\,A' + 2\,C']\,d\tau' + \frac{1}{8\pi}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n'}\,G(\tau,\sigma')\,(y-y')\,p'\,d\sigma' + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n'}\,G(\tau,\sigma')\,(\varrho v)'\,d\sigma',$$

and

$$(3.\,2.\,1.\,19)\quad \varrho w = \frac{1}{8\pi}\int\limits_T G(\tau,\tau')\,[(z'-z)\,A' + 2\,D']\,d\tau' + \frac{1}{8\pi}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n'}\,G(\tau,\sigma')\,(z-z')\,p'\,d\sigma' + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n'}\,G(\tau,\sigma')\,(\varrho w)'\,d\sigma'.$$

Differentiating (3. 2. 1. 17) — (3. 2. 1. 19) with respect to x, y, z, respectively, and adding, one obtains

$$\begin{aligned}(3.\,2.\,1.\,20)\quad & 8\pi\left[\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}\right] \\ &= 2\int\limits_S \left[(\varrho u)'\,\frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial x\,\partial n'} + (\varrho v)'\,\frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial n'} + (\varrho w)'\,\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial n'}\right] d\sigma' \\ &\quad + 2\int\limits_T \left[\frac{\partial G(\tau,\tau')}{\partial x}\,B' + \frac{\partial G}{\partial y}\,C' + \frac{\partial G}{\partial z}\,D'\right] d\tau' \\ &\quad + \int\limits_T \left\{\frac{\partial}{\partial x}\,[(x'-x)\,G(\tau,\tau')] + \frac{\partial}{\partial y}\,[(y'-y)\,G] + \frac{\partial}{\partial z}\,[(z'-z)\,G]\right\} A'\,d\tau' \\ &\quad + \int\limits_S p'\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(x-x')\,\frac{\partial G(\tau,\sigma')}{\partial n'}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(y-y')\,\frac{\partial G}{\partial n'}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(z-z')\,\frac{\partial G}{\partial n'}\right]\right\} d\sigma' \\ &= 0.\end{aligned}$$

By use of the following identities

$$(3.\,2.\,1.\,21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\,[(x'-x)\,G] + \dfrac{\partial}{\partial y}\,[(y'-y)\,G] + \dfrac{\partial}{\partial z}\,[(z'-z)\,G] \\ \qquad = -3G + (x'-x)\,\dfrac{\partial G}{\partial x} + (y'-y)\,\dfrac{\partial G}{\partial y} + (z'-z)\,\dfrac{\partial G}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(x-x')\,\dfrac{\partial G}{\partial n'}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[(y-y')\,\dfrac{\partial G}{\partial n'}\right] + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[(z-z')\,\dfrac{\partial G}{\partial n'}\right] \\ \qquad = 3\,\dfrac{\partial G}{\partial n'} + (x-x')\,\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial n'} + (y-y')\,\dfrac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial n'} + (z-z')\,\dfrac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial n'}, \end{cases}$$

and of (3. 2. 1. 15), the equation (3. 2. 1. 20) can be written as follows:

$$(3.\,2.\,1.\,22)\quad 12\pi p + \int_S p'\left\{(x-x')\frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial x\,\partial n'} + (y-y')\frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial n'} + (z-z')\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial n'}\right\} d\sigma'$$
$$+ 2\int_S \left[(\varrho u)'\frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial x\,\partial n'} + (\varrho v)'\frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial n'} + (\varrho w)'\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial n'}\right] d\sigma'$$
$$+ 2\int_T \left\{\frac{\partial G(\tau,\tau')}{\partial x}B' + \frac{\partial G}{\partial y}C' + \frac{\partial G}{\partial z}D'\right\} d\tau'$$
$$+ \int_T \left\{(x'-x)\frac{\partial G(\tau,\tau')}{\partial x} + (y'-y)\frac{\partial G}{\partial y} + (z'-z)\frac{\partial G}{\partial z}\right\} A' d\tau' = 0.$$

The second integral in (3. 2. 1. 22) can be expressed by use of Green's formula (Appendix I) as

$$(3.\,2.\,1.\,23)\qquad 8\pi\left[\frac{\partial(\varrho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho V)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho W)}{\partial z}\right],$$

where ϱU, ϱV, ϱW are regular potential functions in T satisfying $\nabla^2(\varrho U) = 0$, etc., and when approaching S, take on prescribed values in the form of point functions φ, ψ, χ (See Section 3. 1)[2]).

One shall use (3. 2. 1. 22) in the following manner. Let the point (x, y, z) approach a point $\sigma^*(x^*, y^*, z^*)$ on S. If one considers a vector r from τ to σ' then one can write

$$(3.\,2.\,1.\,24)\quad \int_S p'\left\{(x-x')\frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial x\,\partial n'} + (y-y')\frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial n'} + (z-z')\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial n'}\right\} d\sigma'$$
$$= -\int_S p' r\frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial r\,\partial n'}\,d\sigma',$$

since

$$(x-x')\frac{\partial}{\partial x} + (y-y')\frac{\partial}{\partial y} + (z-z')\frac{\partial}{\partial z} = -r\frac{\partial}{\partial r},$$

where $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$.

For the purpose of considering the behavior of (3. 2. 1. 24) on the boundary S, one can construct a rectangular coordinate system ξ, η, ζ at point σ' on S. Let the positive ζ axis coincide with the inner normal n' at σ', and let ξ and η axes be tangents to S at σ'. Then it is shown in [8] that, with appropriate assumptions, the normal derivative of Green's function in a neighborhood of σ' can be written in the form

$$(3.\,2.\,1.\,25)\quad \frac{\partial}{\partial n'}G(\xi,\eta,\zeta;\sigma') = \frac{2\zeta}{r_1^2} - \frac{(a_1+a_2)}{2}\frac{1}{r_1} - \frac{(a_1-a_2)}{2}\frac{(r_1^2-\eta_1^2)}{r_1(r_1-\zeta)^2}$$
$$+ \Phi(\xi,\eta,\zeta;\sigma'),$$

where $r_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, a_1, a_2 are the principal radii of curvatures of S at σ'. Φ can be represented ([8], 242—252) by a linear combination of harmonic functions $u_0, \ldots, u_p$ which are of logarithmic form, i. e. $\sim \log r$.

The derivatives of Φ of order i are of the order $\frac{1}{r^i}$. From (3. 2. 1. 25) it follows that

$$(3.\,2.\,1.\,26)\quad r_1\frac{\partial^2 G(\xi,\eta,\zeta;\sigma')}{\partial r_1\,\partial n'} = \frac{4\zeta}{r_1^2} + \Phi_1(\xi,\eta,\zeta;\sigma') = \frac{4}{\partial n'}\left(\frac{1}{r_1}\right) + \Phi_1(\xi,\eta,\zeta;\sigma'),$$

---

[2]) The expression (3. 2. 1. 23) exists in $T + S$, is continuous and certainly possesses continuous first order partial derivatives satisfying the H-condition.

where Φ_1 contains the remaining terms after differentiation. As it can be easily verified, the derivatives of Φ_1 of order j are of the order $\frac{1}{r^{j+1}}$. Using (3. 2. 1. 26) equation (3. 2. 1. 24) can now be written as

$$(3.\,2.\,1.\,27)\qquad -\int_S p' r \frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial r\,\partial n'}\,d\sigma' = -4\int_S p' \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma' - \int_S p'\Phi_1\,d\sigma'.$$

Next consider

$$P(\tau) = \int_S p' \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma',$$

and let $\tau \to \sigma^*$. Then, according to theorem 1. 6. 3. 1 (with $\mu \equiv p$, adding (A) and (B), and dividing by 2)

$$(3.\,2.\,1.\,28)\qquad P(\sigma^*) = 2\pi p(\sigma^*) + \int_S p' \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r^*}\right) d\sigma'.$$

Thus, upon letting $\tau \to \sigma^*$, (3. 2. 1. 27) becomes, by use of (3. 2. 1. 28),

$$(3.\,2.\,1.\,29)\qquad \lim_{\tau\to\sigma^*}\left(-\int_S p' r \frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial r\,\partial n'}\,d\sigma'\right) = -8\pi p(\sigma^*) - 4\int_S p' \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r^*}\right) d\sigma' - \int_S p'\Phi_1(\sigma^*,\tau')\,d\sigma'$$

$$= -8\pi p(\sigma^*) - \int_S r^* p' \frac{\partial^2 G(\sigma^*,\sigma')}{\partial r^*\,\partial n'}\,d\sigma',$$

where again use was made of (3. 2. 1. 26) for the last two terms. This is the desired form of the right hand side of (3. 2. 1. 24). Upon substituting (3. 2. 1. 29) and (3. 2. 1. 23) into (3. 2. 1. 22) one obtains an integral equation of the Fredholm type (See Section 1. 8):

$$(3.\,2.\,1.\,30)\qquad p(\sigma^*) - \frac{1}{4\pi}\int_S p(\sigma')\, r^* \frac{\partial^2 G(\sigma^*,\sigma')}{\partial r^*\,\partial n'}\,d\sigma' = \Phi(\sigma^*),$$

where

$$(3.\,2.\,1.\,31)\qquad \Phi(\sigma^*) = -2\left[\frac{\partial(\varrho U)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\varrho V)}{\partial y^*} + \frac{\partial(\varrho W)}{\partial z^*}\right]$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_T \left\{\frac{\partial G(\sigma^*,\tau')}{\partial x^*} B' + \frac{\partial G}{\partial y^*} C' + \frac{\partial G}{\partial z^*} D'\right\} d\tau'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_T \left\{(x'-x)\frac{\partial G(\sigma^*,\tau')}{\partial x^*} + (y'-y)\frac{\partial G}{\partial y^*} + (z'-z)\frac{\partial G}{\partial z^*}\right\} A'\,d\tau'.$$

(3. 2. 1. 30) is analogous to (32) in [6], where is shown on the basis of Newton's potential theory that Φ possesses continuous first order derivatives satisfying H-condition.

Some attention shall be devoted to (3. 2. 1. 30). This equation formally is identical with the one obtained by Lichtenstein in incompressible flow. Lichtenstein shows that this equation is associated with the differential equations of the form [3]:

$$(3.\,2.\,1.\,32)\qquad \begin{aligned} &-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\nabla^2 u = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

[3]) Homogeneous integral equation associated with (3. 2. 1. 30) has the unique solution: $u = v = w = 0$, $p =$ const. It is associated with the system (3. 2. 1. 32) having this trivial solution. Lichtenstein constructs this solution starting from (3. 2. 1. 32). The requirements superimposed upon (3. 2. 1. 23) are necessary for the solution of (3. 2. 1. 30).

with the boundary conditions $\varphi = \psi = \chi = 0$ (these functions refer only to u, v, w, respectively). Evidently, this refers to an infinitely slow forceless motion of a fluid in which only shearing stresses appear.

Let $\Lambda(\sigma)$ be an unique, normalized solution of the homogeneous adjoint integral equation of (3. 2. 1. 30).

Lichtenstein shows that (3. 2. 1. 30) is soluble, if, and only if,

$$\int_S \Lambda(\sigma)\, \Phi(\sigma)\, d\sigma = 0. \tag{3. 2. 1. 33}$$

From the results of the potential theory it can be shown that $\Lambda(\sigma)$ satisfies an H-condition. If the condition (3. 2. 1. 33) is satisfied, then (3. 2. 1. 30) has a definite solution up to an arbitrary positive constant.

Obviously, the entire proof remains unchanged if it is applied to the system of equations

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla^2(\varrho u) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{3. 2. 1. 34}$$

with $\bar{p} \to p$ (p defined in (3. 2. 1. 4)), and $u \to (\varrho u)$, etc., with r formally equal to unity. The obtained solutions are the form

$$(\varrho u) = (\varrho v) = (\varrho w) = 0, \quad p = \text{constant}. \tag{3. 2. 1. 35}$$

3. 2. 2. *Equation for Temperature.* Consider the equation of energy in the following form obtained from (2. 1. 5) by introducing

$$k\nabla^2 T = \nabla^2(kT) - T\nabla^2 k - 2\left[\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z}\right]$$

into (2. 1. 5):

$$\begin{aligned} \varrho c_v\left[u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right] + \bar{p}\theta \\ = \nabla^2(kT) - T\nabla^2 k - \left[\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z}\right] + \bar{\mu}\Phi. \end{aligned} \tag{3. 2. 2. 1}$$

(3. 2. 2. 1) can be rewritten

$$\nabla^2(kT) = E, \tag{3. 2. 2. 2}$$

where

$$\begin{aligned} E = c_v\left[\varrho u\frac{\partial T}{\partial x} + \varrho v\frac{\partial T}{\partial y} + \varrho w\frac{\partial T}{\partial z}\right] + \bar{p}\theta + T\nabla^2 k \\ + \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z} - \bar{\mu}\Phi. \end{aligned} \tag{3. 2. 2. 3}$$

Appropriate expressions will be substituted for $\varrho u\frac{\partial T}{\partial x}$, $\varrho v\frac{\partial T}{\partial y}$, $\varrho w\frac{\partial T}{\partial z}$ as obtained from the equations of motion in the following fashion. For simplicity, the operations are indicated for $\varrho u\frac{\partial T}{\partial x}$ only. Multiplying (2. 1. 1) by u and using equation of state in $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$, (2. 1. 1) furnishes

$$\varrho u\frac{du}{\partial t} = \varrho u X - R\varrho u\frac{\partial T}{\partial x} - RTu\frac{\partial \varrho}{\partial x} + u\left\{\bar{\mu}\nabla^2 u + \frac{\bar{\mu}}{3}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \cdots\right\}. \tag{3. 2. 2. 4}$$

Solving the above for $\varrho u \frac{\partial T}{\partial x}$ one obtains

$$(3.2.2.5)\quad \varrho u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\varrho u X}{R} - \frac{\varrho u}{R}\frac{du}{dt} - Tu\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{u}{R}\left\{\bar{\mu}\nabla^2 u + \frac{\bar{\mu}}{3}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{2}{3}\theta\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x} + 2\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\} \equiv L.$$

Upon obtaining similar expressions for $\varrho v \frac{\partial T}{\partial y}$ and $\varrho w \frac{\partial T}{\partial z}$ (call them M and N), E becomes

$$(3.2.2.6)\quad E = c_v[L + M + N] + \bar{p}RT\theta + T\nabla^2 k + \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z} - \bar{\mu}\Phi.$$

Since (3. 2. 2. 2) is in the form of Poisson's equation it will be solved by the use of Green's function $G(\tau, \tau') = G(x, y, z; x', y', z')$, (See Section 1. 4)

$$(3.2.2.7)\quad kT = -\frac{1}{4\pi}\int_T G(\tau, \tau')\, E'\, d\tau' + \int_S \frac{\partial G(\tau, \sigma')}{\partial n'}(kT)'\, d\sigma'.$$

The second term can be expressed by the use of Green's formula (See Appendix I) as $4\pi k\Theta$, where $k\Theta$ [4]) is a well behaving function in T satisfying $\nabla^2(k\Theta) = 0$ which approaching S takes on prescribed value in form of the point function π.

The system of equations (2. 1. 6), (3. 2. 1. 15), (3. 2. 1. 17) — (3. 2. 1. 19), (3. 2. 1. 30), (3. 2. 2. 7) is completely equivalent to the original system (2. 1. 1) — (2. 1. 6). This system of integrodifferential equations will be solved by successive approximations.

As a preparatory consideration the following system will be discussed:

$$(3.2.2.8)\quad \begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla^2(\varrho u) + B = 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla^2(\varrho v) + C = 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla^2(\varrho w) + D = 0, \\ \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0; \end{cases}$$

$$(3.2.2.9)\quad \nabla^2(kT) - E = 0.$$

This system of equations (3. 2. 2. 8) is formally identical to the system considered by Lichtenstein for incompressible fluid. B, C, D are defined in $T + S$ as continuous functions possessing continuous partial derivatives of first order that satisfy an H-condition.

The system considered by Lichtenstein is of the form

$$(3.2.2.10)\quad \begin{aligned} &-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\nabla^2 u + B = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Moreover, the expression $\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} = K$ certainly possesses in $T + S$ first order partial derivatives satisfying H-condition. This condition is necessary in Lichtenstein's

[4]) The function $k\Theta$ exists, is continuous in $T + S$ and certainly possesses there second order partial derivatives satisfying H-condition.

proof. The assumed boundary conditions are of the form $u = \varphi(\sigma)$, $v = \psi(\sigma)$, $w = \chi(\sigma)$. By reasoning analogous to that presented above Lichtenstein arrives at a form completely analogous to the equation (3. 2. 1. 30) for $\bar{p}(\sigma)$. Using here the results presented at the end of section 3. 2. 1 and the condition (3. 2. 1. 33) Lichtenstein demonstrated that the system (3. 2. 2. 10) has a solution.

The solution of the Lichtenstein integral equation (3. 2. 1. 30) is given by the form

$$\bar{p}(\sigma^*) = \Phi(\sigma^*) + \int K(\sigma^*, \sigma')\, \Phi(\sigma')\, d\sigma' + p^0, \tag{3. 2. 2. 11}$$

where p^0 is an arbitrary constant, and the kernel K is Fredholm's resolvent kernel. Lichtenstein also showed that the function $\bar{p}(\sigma^*)$ appearing in his equation, corresponding to (3. 2. 1. 30), is a continuous function with continuous first partial derivatives satisfying an H-condition[5]).

In the problem under consideration one is confronted with the following three questions:

1. The proof that the system (3. 2. 2. 8) has a solution. This is readily available by adjusting Lichtenstein's proof with $\bar{p} \to p$, $u \to (\varrho u)$, etc., as was done above in section 3. 2. 1.

2. The proof that the function $p(\sigma^*)$ in (3. 2. 1. 30) is a continuous function possessing continuous first and second partial derivatives that satisfy an H-condition. This proof is again immediately available by using Lichtenstein's proof with transformations above in 1.

3. The proof that the equation (3. 2. 2. 9) has a solution. The proof is immediately available from the fact that this equation is a well known Poisson type equation. Hence, a solution always exists provided that the function E satisfies the classical conditions for solvability of Poisson's equations[6]). Obviously, all the proofs furnished by Lichtenstein are valid in the present case generalized to new functions (ϱu), (ϱv), (kT), etc. We shall briefly outline the fundamental philosophy of Lichtenstein's proof as applied to the present case. Equations (3. 2. 2. 8) lead to $\nabla^2 p = K$. By means of the procedure explained briefly in Section 3. 2. 1 one obtains for p an integral equation (3. 2. 1. 30) with Φ, (3. 2. 1. 31) and the condition (3. 2. 1. 33). Lichtenstein shows that p has in any region $C \leqq T$ continuous second order partial derivatives provided that the expression (3. 2. 1. 33) is a continuous regular potential function in $T + S$, possessing there first order derivatives which exist, are continuous and satisfy H-condition. Above, it was shown that this is satisfied. Thus the proof referring to the solution of (3. 2. 1. 30) is the center point of the proof in question. But to solve this, one has to use the derivatives of the Green function only of the forms

$$\frac{\partial G}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial r^* \partial n'},$$

which are thoroughly discussed by Lichtenstein ([6], 393). No knowledge of other characteristic properties of Green's function is required. Similar remarks refer to (3. 2. 2. 7), obtained from (3. 2. 2. 2). As mentioned above, kT certainly possesses second order derivatives satisfying H-condition in $T + S$. In this way the center points of the proof in the present case are explained.

---

[5]) Moreover, in any region, contained completely in T, $\bar{p}$ certainly possesses derivatives of the second order satisfying H-condition.

[6]) The function E exists, is continuous in $T + S$ and certainly possesses there first partial derivatives, continuous, satisfying H-condition. This shows that kT possesses third order derivatives satisfying H-condition (see 1. 6. 1. 2). From (3. 2. 2. 8), $\nabla^2 p = K$, hence p certainly possesses also in T third order derivatives satisfying H-condition (see above conditions on K).

References.

[1] *R. Courant* and *D. Hilbert*, Methods of Mathematical Physics, I. New York, 1955.
[2] *O. D. Kellogg*, Foundations of Potential Theory. Berlin, 1929.
[3] *M. A. Korn*, Sur les equations de l'elasticite. Annales Scientifiques de L'Ecole Normale Superieure, **43** (1907), 9—15.
[4] *G. Kuerti*, The Laminar Boundary Layer in Compressible Flow. Advances in Applied Mechanics, **2** (1951), 21—92.
[5] *L. Lichtenstein*, Encycl. d. Math. Wiss., II C 3, 1909—1921.
[6] *L. Lichtenstein*, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Math. Zeitschr., **28** (1928), 387—415.
[7] *L. Lichtenstein*, Grundlagen der Hydromechanik. Berlin, 1929.
[8] *P. Levy*, Sur l'allure des fonctions de Green et de Neumann dans le voisinage du contour. Acta Math., **42** (1919), 207—267.
[9] *W. V. Lovitt*, Linear Integral Equations. New York, 1924.
[10] *M. A. Ostrowski*, Sur le rayon de convergence de la serie de Blasius. C. R. l'Acad. Sc., **227** (1948), 580—582.
[11] *A. Oudart*, Les méthodes scientifiques de la couche limite laminaire. Publ. Sc. et Tech. du Min. de l'Air, **213** (1948), 123—127.
[12] *W. Rheinboldt*, Über die äußeren Randbedingungen bei den Grenzschichtgleichungen. 50 Jahre Grenzschichtforschung. Edit. by *H. Goertler* and *W. Tollmien*, Braunschweig, 1955.
[13] *H. Weyl*, Concerning the differential equations of some boundary layer problems. Proc. Nat. Acad. Sci. **27** (1941), 578—583.
[14] *H. Weyl*, On the differential equations of the simplest boundary layer problems. Annals of Math. **43** (1942), 2, 381—407.

Eingegangen 7. Januar 1960.

Zur Möbius-Geometrie: Die Inversionsgeometrie ebener Kurven[1].

Von *Martin Barner* in Karlsruhe.

Anlaß zu dieser Arbeit gibt eine Bemerkung van der Woudes[2]), es sei auffallend, daß trotz der vielen verschiedenen Entwicklungslinien, die in der Konformgeometrie verfolgt wurden, gerade zu Beginn die Einführung in die Theorie der ebenen Kurven nirgends recht befriedigt.

Die Inversionsgeometrie der ebenen Kurven ist äquivalent der Projektivgeometrie der Kurven auf einer festen Quadrik. Nun versucht man in den älteren Darstellungen die Methoden der nichteuklidischen Geometrie bezüglich dieser ausgezeichneten Quadrik als Absolutgebilde zu verwenden. Da jedoch die zu betrachtende Figur *auf* der absoluten Quadrik liegt und deshalb der nichteuklidischen Behandlung nicht unmittelbar zugänglich ist, wurde man zu Umwegen gezwungen. So entstand eine Vielzahl verschiedener Theorien[3]).

Die Fragestellung gehört jedoch ihrem Wesen nach in die Projektivgeometrie[4]); ihre Methoden sind hier zu benützen, und diese unterscheiden sich in einigen Punkten von denen der euklidischen bzw. nichteuklidischen Geometrien. Zum Beispiel bietet die Festlegung eines invarianten Parameters hier nicht dieselben Vorteile wie dort — im Gegenteil erzielt man geometrische Aussagen, indem man auf das Transformationsverhalten der Größen bei Parametertransformation achtet. Insofern stellt die Inversionsgeometrie der ebenen Kurven ein besonders einfaches und geometrisch anschauliches Beispiel für die Behandlungsweise der einparametrigen Gebilde mit projektivem Charakter dar.

Wir unterstützen diese Auffassung durch die Darstellung, indem wir von der (euklidischen) Urbildebene (mit Punkten, Kreisen und Geraden als Elementen) und dem projektiven Bildraum R_3 mit der absoluten Quadrik Q sprechen. Die Abbildung der Kreise der euklidischen Urbildebene auf die Punkte des projektiven Bildraumes wird als Einführung in die Möbius-Geometrie eingangs kurz beschrieben; die vorliegende Arbeit ist deshalb ohne besondere Vorkenntnisse lesbar. Bezüglich des Bildraumes verwenden wir die Ausdrucksweise der projektiven Differentialgeometrie.

---

[1]) Diese Arbeit entstand in ihren Grundzügen anläßlich einer Vorlesung in Freiburg i. Br. im W. S. 1952/53. Über den Gegenstand hat der Verfasser am 18. 1. 53 in Hamburg und am 23. 10. 53 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach vorgetragen.

[2]) Vgl. [9] (Nummern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit).

[3]) Unter [1] bis [11] des Literaturverzeichnisses am Ende dieser Arbeit sind die uns bekannt gewordenen Arbeiten über den behandelten Gegenstand zusammengestellt.

[4]) Zur projektiven Differentialgeometrie vergleiche man G. Bol [12].

Nach einer kurzen Einführung in die Möbius-Geometrie der Kreise im ersten Abschnitt behandelt der zweite Abschnitt die Invariantentheorie der Kurven auf Quadriken des projektiven Raumes, die nicht in Ebenenpaare entarten[5]). Zugrundegelegt wird die Gruppe der sinntreuen Projektivitäten und — im Falle eines Kegels als absoluter Quadrik — die Untergruppe, die der engeren Laguerre-Gruppe isomorph ist. Wir beschäftigen uns zwar im Folgenden nur mit den Kurven auf Quadriken des Typus der Kugel, der allgemeiner gehaltene Aufbau ermöglicht aber das gemeinsame Studium von Möbius- und Laguerre-Geometrie ebener Kurven; hier beschränken wir uns auf die Möbius-Geometrie.

Im dritten Abschnitt werden die aufgestellten Formeln Möbius-geometrisch gedeutet. Ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich vorwiegend mit lokal definierten Kreisbüscheln, die von der Kurve unter konstantem Winkel in einer gewissen Ordnung durchsetzt werden. Der letzte Abschnitt gibt ergänzende und weiterführende Ergebnisse in Form von lose nebeneinander gestellten Bemerkungen wieder. Hier werden zum Beispiel auch die Grundformeln zur Behandlung der Kurven im Möbius-Raum und zur Behandlung der Kreisscharen aufgestellt.

Wenn auch das Hauptgewicht bei der vorliegenden Darstellung auf der neuen Betrachtungsweise und den Beziehungen von ebener Möbius-Geometrie zu räumlicher projektiver Differentialgeometrie liegt, so enthält die Arbeit doch auch für die Möbius-Geometrie selbst neue geometrische Ergebnisse und Beziehungen. Eine ausführliche Diskussion soll einer lehrbuchmäßigen Darstellung vorbehalten bleiben.

1. Einführung in die Möbius-Geometrie.

Sind ξ_1, ξ_2 die Koordinaten eines Punktes der euklidischen Ebene in einem kartesischen Koordinatensystem, so stellt

$$p_0(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 2p_1\xi_1 - 2p_2\xi_2 + 2p_3 = 0 \tag{1.1}$$

für $p_0 \neq 0$ die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}\right)$ und dem Radius r mit

$$p_0^2 r^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_0p_3 \tag{1.2}$$

dar; für $p_0 = 0$ definiert (1.1) eine Gerade. Fassen wir die Koeffizienten in der Gleichung (1.1) zu einem Vierervektor zusammen

$$\mathfrak{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3), \tag{1.3}$$

so folgt hieraus unmittelbar (wir rechnen im folgenden die Geraden mit zu den Kreisen): *Zu jedem Kreis der euklidischen Ebene gehört ein Vierervektor, der bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt ist; zu verschiedenen Kreisen gehören nichtproportionale Vierervektoren.* Insofern werden die Kreise der euklidischen Ebene abgebildet auf die Punkte eines projektiven R_3 — diese Abbildung ist umkehrbar eindeutig, wenn wir dem Punkt

$$(0, 0, 0, 1) \tag{1.4}$$

des R_3 als Urbild ein ideelles Gebilde, den *unendlich fernen Punkt* der euklidischen Ebene zuordnen. Durch Hinzufügen dieses Punktes schließen wir die euklidische Ebene zur Möbius-Ebene ab.

[5]) Man vgl. hierzu auch G. Bol [12], § 68 und M. Barner [15].

Aus (1. 2) ersehen wir, daß die Kreise mit dem Radius Null, d. h. die *Punkte* der euklidischen Ebene abgebildet werden auf die Punkte des R_3, für die

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \equiv p_1^2 + p_2^2 - 2p_0p_3 = 0 \tag{1. 5}$$

gilt. Diese Quadrik wollen wir die *absolute Quadrik* Q des Bildraumes nennen. Sie ist vom Typus des Ellipsoids, wir können „Innenpunkte" und „Außenpunkte" unterscheiden. Die Polarebene eines Außenpunktes bezüglich Q schneidet Q reell. Nach (1. 2) sind nur die Urbilder der Außenpunkte Kreise mit reellem Radius.

Zwei Kreise $\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}$ bilden miteinander zwei Winkel φ, ψ mit $\varphi + \psi = \pi$. Es ist also $\cos^2\varphi = \cos^2\psi$. Elementare Rechnung lehrt für alle drei möglichen Fälle: Kreis, Kreis; Kreis, Gerade; Gerade, Gerade die Beziehung

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]\,[\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{p}}]\cos^2\varphi = [\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}]^2, \tag{1. 6}$$

wobei wir unter $[\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}]$ die Polarform

$$[\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}] \equiv p_1\bar{p}_1 + p_2\bar{p}_2 - p_0\bar{p}_3 - p_3\bar{p}_0 \tag{1. 7}$$

der quadratischen Form (1. 5) verstehen.

Im R_3 stellt die Größe

$$\frac{[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]\,[\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{p}}]}{[\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}]^2} \tag{1. 8}$$

das Doppelverhältnis dar, das die Punkte $\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}$ mit den zu ihnen polaren Punkten $\mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{q}}$ auf der Geraden $(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}})$ bilden. Denn setzen wir

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p} + \lambda\bar{\mathfrak{p}}, \quad \bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p} + \bar{\lambda}\bar{\mathfrak{p}},$$

so hat dieses Doppelverhältnis den Wert $\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}$ und λ bzw. $\bar{\lambda}$ sind bestimmt durch

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}] = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] + \lambda[\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}] = 0, \quad [\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}] = [\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}] + \bar{\lambda}[\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{p}}] = 0.$$

Nach (1. 6) kennzeichnet

$$[\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}] = 0 \tag{1. 9}$$

zueinander senkrechte Kreise. Ist $\bar{\mathfrak{p}}$ das Bild eines Punktes der Möbiusebene, d. h. ein Punkt auf Q, so sagt (1. 9) aus — wie man ebenfalls elementar nachprüft —, daß der Punkt $\bar{\mathfrak{p}}$ und der Kreis $\mathfrak{p}$ in der Möbiusebene inzidieren. Hierin ist die wichtige Tatsache begründet: *Den Punkten eines Kreises mit dem Bild $\mathfrak{p}$ entsprechen im Bild die Punkte auf Q, die von der Polarebene von $\mathfrak{p}$ aus Q ausgeschnitten werden.* Wir betrachten die Kreise der Möbiusebene als Gesamtheit ihrer Punkte; dem entspricht im R_3 die eindeutige Zuordnung der Punkte und Ebenen des R_3 durch die Polarverwandtschaft an Q.

Besonderes Interesse haben die linearen Gesamtheiten von Kreisen: Den Punkten einer Ebene des R_3 entsprechen im Urbild ∞^2 Kreise — Kreisnetz genannt. Die Ebene schneidet aus der absoluten Quadrik einen Kegelschnitt aus, dem im Urbild ein Kreis entspricht. Die Kreise des Kreisnetzes, und nur diese, stehen auf dem genannten Kreis senkrecht.

Die Geraden des R_3 ordnen sich zu Paaren als reziproke Polaren bezüglich Q. Sehen wir von den Q berührenden Geradenpaaren ab, so schneidet immer eine von zwei konjugierten Geraden die Quadrik reell, die andere nicht. Im Urbild gehören also zu einem solchen Geradenpaar zwei Punkte der Möbiusebene und das durch diese bestimmte *Kreisbüschel* sowie auch die dazu orthogonalen Kreise des *Büschels von Apollonius* —

letztere haben zum Bild die Punkte der Q schneidenden Geraden. Eine Gerade, die Q berührt, hat als Urbild ein *ausgeartetes Kreisbüschel.* Die *Linienelemente* der Möbiusebene sind also abgebildet auf die Gesamtheit von Geraden des R_3, die die absolute Quadrik berühren.

Einer projektiven Abbildung des R_3 auf sich, die die absolute Quadrik festläßt, entspricht im Urbild eine eineindeutige Abbildung der Möbiusebene auf sich, die Punkte in Punkte, Kreise in Kreise überführt und Inzidenz von Punkten und Kreisen erhält. Der Hauptsatz der projektiven Geometrie lehrt umgekehrt, daß jede solche Abbildung der Möbiusebene auf sich zum Bild im R_3 eine projektive Abbildung hat, die Q in sich überführt. Die Gesamtheit dieser *Möbiusabbildungen* bildet die *Möbiusgruppe.* Die Möbiusgruppe ist also isomorph der Untergruppe der projektiven Gruppe des R_3, die die absolute Quadrik festläßt — d. h. isomorph der hyperbolischen Gruppe des R_3. Wie die projektive Gruppe des R_3 zerfällt die Möbiusgruppe in zwei Scharen, die eine enthält u. a. die eigentlichen Bewegungen der euklidischen Ebene, die zweite die Spiegelungen. Die erste Schar bildet selbst eine Gruppe, die Untergruppe der *sinntreuen* Möbiusabbildungen; im R_3 wird sie dargestellt von den Projektivitäten mit positiver Determinante, die Q festlassen. *Uns werden die differentialgeometrischen Eigenschaften der Kurven der Möbiusebene interessieren, die invariant sind bei sinntreuen Möbiusabbildungen.*

2. Die Projektivgeometrie der Kurven auf Quadriken.

In dem projektiven Raum R_3 sei eine Quadrik Q

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \sum_{i,k=0}^{3} a_{ik} p_i p_k = 0, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad a_{ik} = \text{const} \tag{2. 1}$$

gegeben. Über diese Quadrik sei nur vorausgesetzt, daß sie ein Kurvenstück der Art trägt, daß die Tangenten an die Kurve nicht ganz auf der Quadrik liegen. Praktisch bedeutet dies, wie wir sehen werden, daß Q eine nichtentartete Fläche zweiter Ordnung mit reellen Punkten oder ein reeller Kegel ist. Das Symbol $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]$ kennzeichne die Polarform der quadratischen Form (2. 1):

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}] \equiv \sum_{i,k=0}^{3} a_{ik} p_i q_k.$$

$\mathfrak{x}(t)$ durchlaufe eine Kurve, die ganz auf dieser Quadrik liegt, d. h. es gelte identisch in t

$$[\mathfrak{x}(t), \mathfrak{x}(t)] = 0; \text{ daraus folgt}^{6)} \; [\mathfrak{x}'(t), \mathfrak{x}(t)] = 0. \tag{2. 2}$$

Dieselbe Kurve wird auch durch

$$\bar{\mathfrak{x}}(t) = \varrho(t)\, \mathfrak{x}(t) \tag{2. 3}$$

dargestellt. Nach (2. 2) und (2. 3) wird nun

$$[\bar{\mathfrak{x}}'(t), \bar{\mathfrak{x}}'(t)] = \varrho^2(t)\, [\mathfrak{x}'(t), \mathfrak{x}'(t)]. \tag{2. 4}$$

Ist hier neben (2. 2) auch noch

$$[\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'] = 0, \tag{2. 5}$$

so liegt an dieser Stelle die Tangente an die Kurve ganz auf der Quadrik Q. Ist die Quadrik vom Typus des Ellipsoids, so tritt dieser Fall sicher nicht ein; andernfalls schließen wir Kurvenpunkte auf Quadriken, für die (2. 5) gilt, von der Betrachtung aus. Es ist dann also immer

$$[\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'] \neq 0,$$

[6]) Man beachte, daß das Symbol $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]$ wie ein gewöhnliches Produkt differenziert wird; wegen der Symmetrie der a_{ik} ist $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}] = [\mathfrak{q}, \mathfrak{p}]$.

und wir können den Normungsfaktor $\varrho(t)$ in (2. 3) nach (2. 4) so einrichten, daß

$$[\bar{\mathfrak{x}}', \bar{\mathfrak{x}}'] = \pm 1$$

ist. Indem wir gegebenenfalls die Gleichung der Quadrik (2. 1) mit -1 multiplizieren, können wir sogar

$$[\bar{\mathfrak{x}}', \bar{\mathfrak{x}}'] = 1 \tag{2. 6}$$

erreichen.

Wir denken uns dies von vornherein so eingerichtet; dann gilt also

$$[\mathfrak{x}, \mathfrak{x}] = [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'] = 0, \; [\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'] = -[\mathfrak{x}, \mathfrak{x}''] = 1, \; [\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''] = 0. \tag{2. 7}$$

Bei einer Parametertransformation werden die Bedingungen (2. 7) nicht erhalten bleiben. Man koppelt deshalb mit einer Parametertransformation

$$t^* = f(t); \; \varphi = \frac{dt^*}{dt}, \; A = \frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi} \tag{2. 8}$$

die Umnormung

$$\mathfrak{x}^* = \varphi \mathfrak{x} \tag{2. 9}$$

und nennt die gekoppelte Transformation *Sterntransformation.* Bei Sterntransformation wird nun

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}^* &= \varphi \mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}^*_{t^*} &= \frac{d\mathfrak{x}^*}{dt^*} = \mathfrak{x}' + 2A\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}^*_{t^*t^*} &= \frac{d^2\mathfrak{x}^*}{dt^{*2}} = \varphi^{-1}(\mathfrak{x}'' + 2A\mathfrak{x}' + 2A'\mathfrak{x}), \end{aligned} \tag{2. 10}$$

und also, wie es sein soll,

$$[\mathfrak{x}^*_{t^*}, \mathfrak{x}^*_{t^*}] = [\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'].$$

Die Größe

$$2a = -[\mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''] \tag{2. 11}$$

transformiert sich nach (2. 10) wie folgt:

$$a^* = \varphi^{-2}(a + 2A' - 2A^2). \tag{2. 12}$$

Man verwendet diese Größe a, um ein mit der Kurve (unter Beachtung der Parameterverteilung) invariant verbundenes Begleittetraeder zu definieren, dessen Basisvektoren ein besonders einfaches Transformationsverhalten bei Sterntransformation zeigen. Statt $\mathfrak{x}''$ in (2. 10) wird man die Linearkombination

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}'' - a\mathfrak{x} \tag{2. 13}$$

benützen; denn in ihrer Transformationsformel (vgl. (2. 10), (2. 12))

$$\mathfrak{y}^* = \varphi^{-1}(\mathfrak{y} + 2A\mathfrak{x}' + 2A^2\mathfrak{x}) \tag{2. 14}$$

kommt A nur rational, A' dagegen nicht vor.

Dieses Verfahren ließe sich fortsetzen — wir kämen neben

$$\mathfrak{x}, \; \mathfrak{x}' = \mathfrak{t}, \; \mathfrak{y} = \mathfrak{x}'' - a\mathfrak{x} \tag{2. 15}$$

zu einem weiteren, von $\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}$ linear unabhängigen Vektor, mit $\mathfrak{z}$ bezeichnet, den wir jetzt auf anderem Wege einführen wollen.

Der Punkt $\mathfrak{y}$ liegt auf der Quadrik Q, denn nach (2. 11) und (2. 13) wird

$$[\mathfrak{y}, \mathfrak{y}] = [\mathfrak{x}'' - a\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'' - a\mathfrak{x}] = -2a + 2a = 0. \tag{2. 16}$$

Es besteht also nach (2. 7), (2. 15) und (2. 16) für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{y}$ die Produkttabelle:

(2. 17)

[,]	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{y}$
$\mathfrak{x}$	0	0	-1
$\mathfrak{t}$	0	1	0
$\mathfrak{y}$	-1	0	0

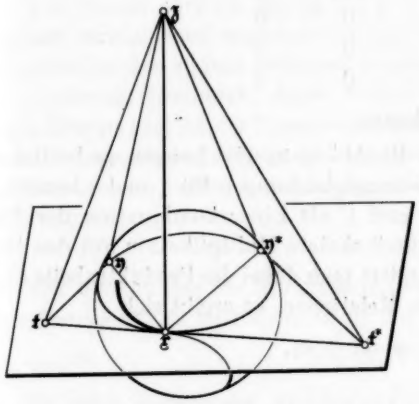


Fig. 1. Begleitendes Bezugssystem einer Kurve im Bildraum für zwei Parameterverteilungen.

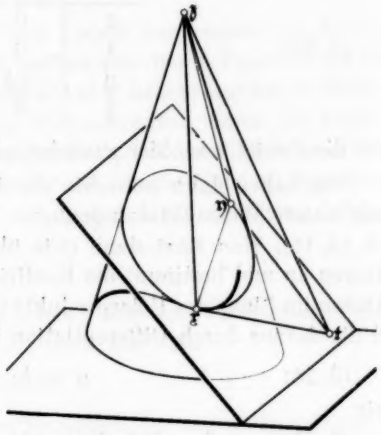


Fig. 2. Begleitendes Bezugssystem einer Kurve im Bildraum bei ausgearteter Quadrik Q.

Die Ebene $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y})$ schneidet die feste Quadrik Q in einem nichtentarteten Kegelschnitt. Ein Punkt dieser Ebene

$$\mathfrak{p} = p_0\mathfrak{x} + p_1\mathfrak{t} + p_3\mathfrak{y} \tag{2. 18}$$

liegt nämlich nach (2. 17) genau dann auf der festen Quadrik, wenn

$$-2p_0p_3 + p_1^2 = 0 \tag{2. 19}$$

gilt; dies ist die Gleichung eines nichtausgearteten Kegelschnittes.

Der Pol der Ebene $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y})$ bezüglich der Quadrik Q ist also von den Punkten $\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}$ linear unabhängig. Stellt $\mathfrak{z}(t)$ diesen Pol dar, so gilt also

$$D = (\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \neq 0. \tag{2. 20}$$

Dies erlaubt, die Normierung des Vektors $\mathfrak{z}$ invariant mit der Figur zu koppeln. Für den umnormierten Vektor

$$\bar{\mathfrak{z}}(t) = \lambda(t)\,\mathfrak{z}(t)$$

wird nach (2. 20)

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \bar{\mathfrak{z}}) = \lambda(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \lambda D.$$

Die Normierung des Vektors $\bar{\mathfrak{z}}$ ist also durch die Forderung

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \bar{\mathfrak{z}}) = -1$$

eindeutig festgelegt. Wir denken uns den Vektor $\mathfrak{z}(t)$ von vornherein in dieser Weise normiert. Es gilt dann

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = -1. \tag{2. 21}$$

Diese Bedingung bleibt bei sinntreuen Projektivitäten mit der Determinante 1, auf die wir uns hier beschränken wollen, erhalten.

Mit einer Kurve auf einer Quadrik ist bei gegebener Parameterverteilung projektivinvariant das bewegte System mit den Basisvektoren

$$\mathfrak{x}(t),\ \mathfrak{t}(t),\ \mathfrak{y}(t),\ \mathfrak{z}(t) \tag{2. 22}$$

verbunden. Nach (2. 17) und der Definition von $\mathfrak{z}$ genügen diese Vektoren der Produkttabelle:

(2. 23)

$[\,,\,]$	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{z}$
$\mathfrak{x}$	0	0	-1	0
$\mathfrak{t}$	0	1	0	0
$\mathfrak{y}$	-1	0	0	0
$\mathfrak{z}$	0	0	0	ε

Über die Größe ε ist hier zunächst nichts bekannt.

Wir haben dann weiterhin die Aufgabe, die Ableitungsgleichungen zu bestimmen, denen unsere Basisvektoren genügen. Die Ableitungsgleichungen für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{t}$ kennen wir nach (2. 15). Man setzt dann (wie üblich) $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{z}'$ als Linearkombination der Basisvektoren an und bestimmt die Koeffizienten durch skalare Multiplikation mit den Basisvektoren im Sinne des Polarprodukts (2. 2). Benützt man dabei die Produkttabelle (2. 23) und die daraus durch Differentiation folgenden Relationen, so ergibt sich

$$\mathfrak{y}' = b\mathfrak{z} + a\mathfrak{t},\quad \mathfrak{z}' = \varepsilon b\mathfrak{x} + c\mathfrak{z}, \tag{2. 24}$$

worin

$$\varepsilon b = [\mathfrak{y}', \mathfrak{z}] = -[\mathfrak{y}, \mathfrak{z}'],\quad \varepsilon' = [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}]' = 2[\mathfrak{z}, \mathfrak{z}'] = 2c\varepsilon \tag{2. 25}$$

ist.

Differenziert man dann (2. 21), so wird einerseits

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})' = 0, \tag{2. 26}$$

andererseits nach (2. 15) und (2. 24)

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})' = -c.$$

Daraus folgt

$$c = 0. \tag{2. 27}$$

Dies zieht nach (2. 25)

$$\varepsilon = \text{const} \tag{2. 28}$$

nach sich.

Ausgehend von einer fest vorgegebenen quadratischen Form mit konstanten Koeffizienten sind wir über die Normierungsbedingungen (2. 7) und (2. 21) zwangsläufig zu den Basisvektoren (2. 22) gekommen, die durch die Ableitungsgleichungen (2. 15), (2. 24) verknüpft sind, wobei (2. 27), (2. 28) gilt. Dabei war der Vektor $\mathfrak{x}(t)$ nur bis auf das Vorzeichen festgelegt. Für die Geometrie unserer Figur spielt zwar die durch (2. 1) bestimmte Quadrik eine Rolle, nicht aber die in beliebiger Weise normierte zugehörige quadratische Form. Wir haben also noch die Freiheit, die Form (2. 1) mit einem positiven konstanten Faktor zu multiplizieren.

Wir wollen diesen Faktor $\varkappa^{-2}$ nennen. Bei dieser Umnormierung der Form (2. 1) bleibt die Normierungsbedingung (2. 7) genau dann erhalten, wenn wir gleichzeitig

$$\tilde{\mathfrak{x}} = \pm\, \varkappa\mathfrak{x}$$

setzen. Nach (2. 15) wird dann

$$\tilde{\mathfrak{t}} = \pm\, \varkappa\mathfrak{t},\quad \tilde{\mathfrak{y}} = \pm\, \varkappa\mathfrak{y}$$

und (2. 21) führt auf

$$\tilde{\mathfrak{z}} = \pm\, \varkappa^{-3}\mathfrak{z}.$$

Hiernach und wegen der Umnormung der Form (2. 1) mit $\varkappa^{-2}$ folgt

$$\tilde{\varepsilon} = \varkappa^{-2}\varepsilon. \tag{2. 29}$$

Ist $\varepsilon = 0$, so wird auch $\tilde{\varepsilon} = 0$ bei jeder Wahl des Normierungsfaktors $\varkappa$. Ist $\varepsilon \neq 0$, so setzen wir $\tilde{\varepsilon} = 1$, falls ε positiv, und $\tilde{\varepsilon} = -1$, falls ε negativ ist. Dann bestimmt (2. 29) bis auf das Vorzeichen eindeutig einen reellen Normierungsfaktor, für den dies der Fall ist. Die Wahl des Vorzeichens ist aber unwesentlich, da sämtliche Basisvektoren dieses Vorzeichen erhalten.

$\varepsilon = 0$ zieht nach (2. 24), (2. 27) $\mathfrak{z}' = 0$ nach sich. $\mathfrak{z}$ stellt dann einen mit der Figur invariant verbundenen raumfesten Punkt dar. Wir denken uns diesen Punkt vorgegeben und außerdem den zu ihm gehörigen konstanten Vektor unter Beachtung der Normierung von vornherein bestimmt; dieser Vektor heiße $\mathfrak{z}_0$. Wir schränken dann die zugrunde gelegte Gruppe projektiver Transformationen dahingehend ein, daß diese Transformationen den fest vorgegebenen Vektor $\mathfrak{z}_0$ auch analytisch invariant lassen. Über die Umnormierungskonstante $\varkappa$ verfügen wir in diesem Fall (wieder bis auf das Vorzeichen) durch die Forderung

$$\tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}_0.$$

Wir denken uns die Normierung der quadratischen Form von vornherein in dieser Weise festgelegt. Es tritt dann in (2. 23) und (2. 25) einer der Fälle

$$\varepsilon = 1, \quad \varepsilon = 0, \quad \varepsilon = -1 \tag{2. 30}$$

ein. Die feste Quadrik hat in lokalen Koordinaten bezüglich der zugrunde gelegten bewegten Basis (2. 22)

$$\mathfrak{p} = p_0\mathfrak{x} + p_1\mathfrak{t} + p_2\mathfrak{z} + p_3\mathfrak{y} \tag{2. 31}$$

die Gleichung

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \equiv -2p_0p_3 + p_1^2 + \varepsilon p_2^2 = 0. \tag{2. 32}$$

Zusammenfassend ergibt sich nach (2. 15), (2. 24), (2. 30) und (2. 32): *Ist $\mathfrak{x}(t)$ eine Kurve auf einer festen Quadrik des dreidimensionalen Raumes und liegt die Tangente an die Kurve an der betrachteten Stelle nicht auf der Quadrik, so genügen die mit der Kurve und der zugrunde gelegten Parameterverteilung projektivinvariant verknüpften Basisvektoren* (2. 22) *den Ableitungsgleichungen*

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{t}' = \mathfrak{y} + a\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}' = b\mathfrak{z} + a\mathfrak{t}, \quad \mathfrak{z}' = \varepsilon b\mathfrak{x}. \tag{2. 33}$$

Bezogen auf diese Basis hat die feste Quadrik die Gleichung (2. 32). *Für ε ist einer der Werte* 1, 0, -1 *zuzulassen. Die feste Quadrik ist*

bei $\varepsilon = 1$ vom Typus des Ellipsoids,

bei $\varepsilon = 0$ ein Kegel,

bei $\varepsilon = -1$ vom Typus des einschaligen Hyperboloids.

Ferner gilt: *Zwei solche Kurven und die sie tragenden Quadriken sind dann und nur dann durch eine Projektivität ineinander überzuführen, wenn die Funktionen $a(t)$, $b(t)$ und die Konstante ε ($\varepsilon = 1, 0, -1$) für beide Kurven übereinstimmen. (Ist die Quadrik ein Kegel [$\varepsilon = 0$], so müssen die zugelassenen Projektivitäten nicht nur die beiden Kegel, sondern auch die vorgelegte Normierung einer bestimmten Größe, etwa des Vektors der Kegelspitze, ineinander überführen.)*

Beim Übergang zu einem anderen Parameter soll die Bedingung (2. 21) erhalten bleiben. Nach (2. 10) und (2. 14) ergibt sich daraus, daß der Vektor $\mathfrak{z}$ bei Sterntransformation invariant ist. Weiter folgt dann aus (2. 25) für b das Transformationsverhalten

$$b^* = \varphi^{-2}b. \tag{2. 34}$$

Das Verschwinden von b und das Vorzeichen von b haben demnach geometrische Bedeutung. Aus (2. 33) folgt

$$(2.\,35)\qquad (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''') = b(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = -b.$$

Das Vorzeichen von b kennzeichnet den Windungssinn der Kurve $\mathfrak{x}(t)$; an den Stellen, an denen b verschwindet, ist die Schmiegebene der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ stationär.

Auf einem Kurvenstück ohne stationäre Schmiegebene können wir durch

$$(2.\,36)\qquad \hat{t} = \int \sqrt{|b|}\, dt$$

einen invarianten Parameter einführen. Bezogen auf diesen Parameter ist dann

$$(2.\,37)\qquad b^*(\hat{t}) = \pm 1.$$

Es gilt: *Zwei Quadrikkurven gleichen Windungssinnes sind dann und nur dann projektiv gleichwertig, wenn $a(\hat{t})$ als Funktion des invarianten Parameters und die Konstante ε ($\varepsilon = 1, 0, -1$) für beide Kurven übereinstimmen.*

Wir stellen noch die Transformationsformeln zusammen. Bei Sterntransformation ist

$$(2.\,38)\qquad \mathfrak{x}^* = \varphi\mathfrak{x},\ \mathfrak{t}^* = \mathfrak{t} + 2A\mathfrak{x},\ \mathfrak{y}^* = \varphi^{-1}(\mathfrak{y} + 2A\mathfrak{t} + 2A^2\mathfrak{x}),\ \mathfrak{z}^* = \mathfrak{z}$$

$$(2.\,39)\qquad a^* = \varphi^{-2}(a + 2A' - 2A^2),\ b^* = \varphi^{-2}b.$$

Nach Abschnitt 1 folgt unmittelbar: *Die Formeln* (2. 23), (2. 33), (2. 38), (2. 39) *beherrschen die Möbius-Geometrie der ebenen Kurven. Dabei ist $\varepsilon = 1$.*

3. Geometrische Deutung.

Wir kommen zu der geometrischen Deutung der aufgestellten Formeln, die wir hauptsächlich in der Möbiusebene vornehmen wollen. Dann ist die ausgezeichnete Quadrik des Bildraumes vom Typus der Kugel, und wir haben in den Formeln des Abschnitts 2 $\varepsilon = 1$ zu setzen (vgl. (1. 5) mit (2. 32)).

Invariant mit der Kurve $\mathfrak{x}$ auf Q ist die Schmiegebene der Kurve verbunden, die durch den polaren Punkt $\mathfrak{z}$ gekennzeichnet ist. Diese Ebene schneidet aus Q einen Kegelschnitt aus, $\mathfrak{y}$ ist ein Punkt dieses Kegelschnittes. $\mathfrak{y}$ hängt im übrigen noch von der Wahl der Parameterverteilung ab, also: *Die Punkte $\mathfrak{y}^*$, die zu verschiedenen Parameterverteilungen gehören, beschreiben an einer festen Kurvenstelle den Kegelschnitt, den die Schmiegebene von $\mathfrak{x}$ aus Q ausschneidet.* $\mathfrak{y}^*$ gibt bei festem t als Funktion von A die Parameterdarstellung dieses Kegelschnittes.

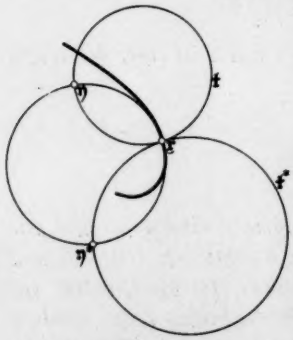


Fig. 3. Zu zwei Parameterverteilungen gehörige Bezugssysteme, die in einem Kurvenpunkt Möbius-invariant mit der Kurve verbunden sind.

In der euklidischen Urbildebene entsprechen den Punkten dieses Kegelschnittes die Punkte eines Kreises, der (wie die Schmiegebene im Bild) drei aufeinanderfolgende Punkte mit der Kurve gemeinsam hat — dies ist der *Schmiegkreis* der Kurve $\mathfrak{x}$. Der Punkt $\mathfrak{y}$ ist ein Punkt des Schmiegkreises. *$\mathfrak{y}^*$ gibt bei festem t in Abhängigkeit von A die Parameterdarstellung des Schmiegkreises der Ausgangskurve.* $\mathfrak{t}$ entspricht in der Möbiusebene der zu dem Schmiegkreis senkrechte Kreis durch den zugehörigen Kurvenpunkt und den Punkt $\mathfrak{y}$. Somit: *Mit einer Kurve ist Möbius-invariant verbunden der Schmiegkreis und bei gegebener Parameterverteilung auf diesem ein Punkt $\mathfrak{y}$, oder — damit äquivalent — ein zu der Kurve senkrechter Kreis durch den Kurvenpunkt, der aus dem Schmiegkreis $\mathfrak{y}$ ausschneidet.* Wir nennen ihn den zu der Parameterverteilung gehörenden *Normalkreis*.

Welches ist nun der geometrische Zusammenhang zwischen der Parameterskala und dem zugehörigen Normalkreis[7]? Wir betrachten eine bestimmte Kurvenstelle $\mathfrak{x}_0$, der wir der Einfachheit halber den Parameterwert $t = 0$ zuordnen. Wir gehen dann von den Kurvenpunkten $\mathfrak{x}(t)$, $\mathfrak{x}(-t)$ aus, die bezüglich der Parameterskala „gleich weit" von $\mathfrak{x}_0$ entfernt sind. Diese beiden Punkte definieren die Figur zweier zueinander orthogonaler Kreisbüschel. In jedem der beiden Büschel gibt es genau einen Kreis durch $\mathfrak{x}_0$; sei $\tilde{\mathfrak{z}}(t)$ der Kreis durch $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{x}(t)$, $\mathfrak{x}(-t)$ und $\tilde{\mathfrak{t}}(t)$ der Kreis durch $\mathfrak{x}_0$ des orthogonalen Büschels. *Für t gegen Null streben die Kreise* $\tilde{\mathfrak{z}}(t)$, $\tilde{\mathfrak{t}}(t)$ *eindeutig bestimmten Grenzlagen zu. Dasselbe gilt dann auch für deren zweiten Schnittpunkt* $\tilde{\mathfrak{y}}(t)$ *und zwar geht* $\tilde{\mathfrak{z}}(t)$ *in den Schmiegkreis der Stelle* $t = 0$, $\tilde{\mathfrak{t}}(t)$ *in den zu der Parameterverteilung gehörenden Normalkreis* $\mathfrak{t}(0)$ *und damit* $\tilde{\mathfrak{y}}(t)$ *in den Punkt* $\mathfrak{y}(0)$ *über.*

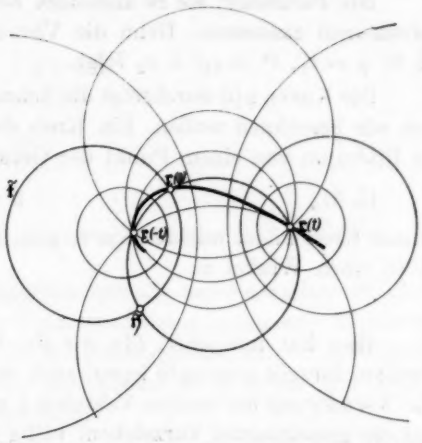


Fig. 4. Der zu einer gegebenen Parameterverteilung gehörende Normalkreis in $\mathfrak{x}(0)$ ergibt sich als Grenzlage aus $\tilde{\mathfrak{t}}$.

Im Bildraum wird das Büschel der Kreise des Apollonius, das die Punkte $\mathfrak{x}(t)$, $\mathfrak{x}(-t)$ als Nullkreise enthält, durch die Gerade $(\mathfrak{x}(t), \mathfrak{x}(-t))$ dargestellt. Der Kreis $\tilde{\mathfrak{t}}(t)$ hat zum Bild den Punkt

$$\tilde{\mathfrak{t}}(t) = [\mathfrak{x}(t), \mathfrak{x}_0]\,\mathfrak{x}(-t) - [\mathfrak{x}(-t), \mathfrak{x}_0]\,\mathfrak{x}(t); \tag{3.1}$$

denn für ihn gilt

$$[\tilde{\mathfrak{t}}(t), \mathfrak{x}_0] = 0.$$

Mittels der Ableitungsgleichungen (2.33) bestätigt man

$$\tilde{\mathfrak{t}}(0) = \tilde{\mathfrak{t}}'(0) = \tilde{\mathfrak{t}}''(0) = 0,$$
$$\tilde{\mathfrak{t}}'''(0) = -[\mathfrak{y}(0), \mathfrak{x}_0]\,\mathfrak{t}(0) - [\mathfrak{y}(0), \mathfrak{x}_0]\,\mathfrak{t}(0) = 2\mathfrak{t}(0),$$

und also wird

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tilde{\mathfrak{t}}(0)}{t^3} = \frac{1}{3}\,\mathfrak{t}(0), \tag{3.2}$$

wie behauptet wurde. Daß $\tilde{\mathfrak{z}}(t)$ in der Grenze in den Schmiegkreis übergeht, versteht sich von selbst. Damit ist dann auch $\mathfrak{y}(0)$ als die eindeutig bestimmte Grenzlage des Punktes $\tilde{\mathfrak{y}}(t)$ gesichert.

Wir sahen, daß zu gegebener Parameterverteilung ein bestimmtes Bezugssystem, insbesondere ein bestimmter Normalkreis gehört — *gibt man umgekehrt an jeder Stelle der Kurve einen die Kurve senkrecht schneidenden Kreis (vom Kurvenparameter stetig abhängig) vor, so läßt sich die Parameterverteilung immer so einrichten, daß die zugehörigen Normalkreise mit den vorgegebenen Kreisen zusammenfallen.* Gleichbedeutend ist die Aussage: *Gibt man auf dem Schmiegkreis einer jeden Kurvenstelle einen Punkt, d. h. eine die Schmiegkreisschar stetig durchsetzende Kurve vor, so läßt sich die Parameterverteilung immer so einrichten, daß* $\mathfrak{y}$ *diese Kurve durchläuft.* Der neue Parameter bestimmt sich in beiden Fällen nach (2.38) aus einer Differentialgleichung der Form

$$A(t) = g(t), \text{ d. h. aus } \frac{d^2t^*}{dt^2} - 2g(t)\frac{dt^*}{dt} = 0 \tag{3.3}$$

mit bekanntem $g(t)$.

[7]) Vergleiche hierzu [14].

In den Anwendungen nützt man diesen Tatbestand aus, indem man das Bezugssystem und damit die Parameterverteilung der vorliegenden Fragestellung anpaßt.

Die Parameter, die zu demselben Bezugssystem gehören, hängen durch lineare Transformationen zusammen. Denn die Voraussetzung zieht $A = 0$ nach sich, woraus nach (2. 8) $\varphi = c_1$, $t^* = c_1 t + c_2$ folgt.

Die Kurve $\mathfrak{y}(t)$ durchsetzt die Schmiegkreisschar unter einem bestimmten Winkel α, den wir berechnen wollen. Ein Kreis des durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ aufgespannten Büschels wird im Bildraum von einem Punkt der Geraden $(\mathfrak{t}, \mathfrak{z})$ dargestellt, etwa von

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{t} + \hat{\alpha}\mathfrak{z}. \tag{3. 4}$$

Dieser Kreis bildet mit der Kurve $\mathfrak{x}(t)$, d. h. mit dem Schmiegkreis $\mathfrak{z}$ dieser Kurve, nach (1. 6) einen Winkel α:

$$\operatorname{cotg}^2 \alpha = \hat{\alpha}^2.$$

Hier hat nun aber, (da wir die Gruppe der sinntreuen Projektivitäten unseren Untersuchungen zugrunde legen) auch das Vorzeichen von $\hat{\alpha}$ invariante Bedeutung. Denn die Normierung der beiden Vektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{z}$ ist durch (2. 15) mit (2. 6) und (2. 21) (bis auf ein gemeinsames Vorzeichen) völlig festgelegt.

Wir denken uns den Winkel α im Punkte $\mathfrak{x}$ vom Schmiegkreis aus gemessen. α liegt also in dem Winkelbereich $0 < \alpha < 2\pi$. Wir bestimmen den genaueren Zusammenhang zwischen $\hat{\alpha}$ und dem Winkel α, indem wir die lokalen Koordinaten in der Urbildebene verwenden und dort die Beziehung errechnen.

Nach (1. 3), (1. 1) entspricht dem Schmiegkreis, d. h. dem Punkt $(0, 0, 1, 0)$ in der Urbildebene die ξ_1-Achse des Koordinatensystems. Zu (3. 4), d. h. zu $(0, 1, \hat{\alpha}, 0)$ gehört entsprechend die Gerade

$$\xi_1 + \hat{\alpha}\xi_2 = 0 \tag{3. 5}$$

durch den Ursprung des cartesischen Koordinatensystems. Ist $\{\xi_1, \xi_2\}$ ein Punkt dieser Geraden, so finden wir den gesuchten Winkel aus

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

Nach (3. 5) ist also

$$\operatorname{cotg} \alpha = -\hat{\alpha}.$$

Betrachten wir insbesondere einen solchen Kreis $\mathfrak{p}$ in (3. 4) des Büschels durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, der die von $\mathfrak{y}(t)$ beschriebene Kurve berührt! Für ihn ist nach den Ableitungsgleichungen (2 24)

$$\hat{\alpha} = -\frac{a}{b}.$$

Ein Kreis durch den Kurvenpunkt, der die Kurve $\mathfrak{y}(t)$ berührt, bildet im Kurvenpunkt mit dem Schmiegkreis den Winkel α mit

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{a}{b}. \tag{3. 6}$$

Es gibt noch andere Kurven $\mathfrak{y}^*$, die die Schmiegkreisschar unter demselben Winkel $\alpha(t)$ durchsetzen — wie hängen die zugehörigen Parameter miteinander zusammen? (Diese Kurven $\mathfrak{y}^*$ bilden eine Isogonalschar der Schmiegkreisschar im weiteren Sinne des Wortes — alle Kurven der Schar durchsetzen den gleichen Schmiegkreis unter festem Winkel, dagegen ändert sich dieser Winkel im allgemeinen beim Übergang zum Nachbarkreis. α in (3. 6) ist ja Funktion von t.)

Für die gesuchten Parameter gilt neben (3. 6) und nach (2. 39) auch

$$-\frac{a^*}{b^*} = \hat{\alpha}; \tag{3. 7}$$

d. h. nach (2. 21)

$$-\frac{1}{b}(a + 2A' - 2A^2) = \hat{\alpha} \tag{3. 8}$$

und also

$$A' - A^2 = 0. \tag{3. 9}$$

Durch Integration folgt nach (2. 8) hieraus

$$t^* = \frac{c_1 t + c_2}{t + c_3}, \quad c_1, c_2, c_3 = \text{const}, \quad c_1 c_3 \neq c_2. \tag{3. 10}$$

Die Parameter, die zu Kurven $\mathfrak{y}^*$ gehören, die die Schmiegkreise unter denselben Winkeln $\alpha(t)$ durchsetzen, hängen durch gebrochene lineare Transformationen zusammen. Weiterhin folgt: *Die Isogonalschar der Schmiegkreisschar, die die Schmiegkreise unter den Winkeln $\alpha(t)$ schneiden, bilden diese Schmiegkreise projektiv aufeinander ab, d. h. die Kurven der Schar durchsetzen diese unter konstantem Doppelverhältnis.*

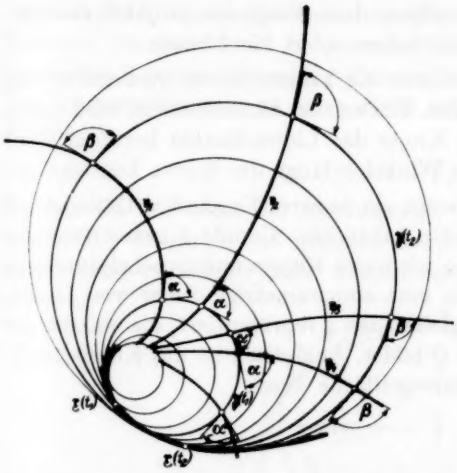


Fig. 5. Die Isogonaltrajektorien $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots$ der Schmiegkreisschar $\mathfrak{z}(t)$ durchsetzen einen Schmiegkreis unter demselben Winkel. Dieser kann sich von Schmiegkreis zu Schmiegkreis ändern.

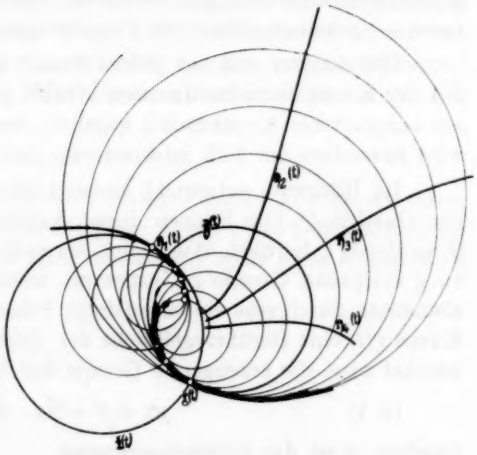


Fig. 6. Orthogonaltrajektorien der Schmiegkreisschar $\mathfrak{z}(t)$ der Kurve $\mathfrak{x}(t)$. Die Schmiegkreise einer Orthogonaltrajektorie sind gleichzeitig Normalkreise der Ausgangskurve.

Besonderes Interesse haben natürlich solche Kurven $\mathfrak{y}^*$, die alle Schmiegkreise entlang der Kurve unter ein und demselben Winkel $\alpha = \text{const.}$ durchdringen. Durchläuft $\mathfrak{y}$ eine solche *Isogonalkurve* gegebenen Winkels $\alpha = \text{const.}$, so gilt für den zugehörigen Parameter nach (3. 6)

$$-\frac{a}{b} = \hat{\alpha} = \text{const.} \tag{3. 11}$$

Die Parameter, für die (3. 11) gilt, nennen wir *α-Isogonalparameter* und das zugehörige Bezugssystem *α-Isogonalsystem.* Natürlich gilt auch: *Die α-Isogonalparameter hängen durch gebrochene lineare Transformationen zusammen.*

Ausgezeichnet ist der Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also $\hat{\alpha} = 0$, d. h. nach (3. 6)

$$a = 0. \tag{3. 12}$$

Hier fällt der Berührkreis der Kurve $\mathfrak{y}$, der durch den Kurvenpunkt geht, mit dem Normalkreis zusammen, und dieser Normalkreis ist Schmiegkreis der Kurve $\mathfrak{y}$. Denn die Schmiegebene der Kurve $\mathfrak{y}$ im Bildraum wird bei Gültigkeit von (3. 12) nach (2. 33) von den Punkten $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}$ aufgespannt. Im Bildraum treffen sich die Tangenten an die Kurven $\mathfrak{y}$, für die (3. 12) gilt, nach (2. 33) in dem Punkte $\mathfrak{z}(t)$. Diese Kurven sind deshalb Bahnkurven einer „Zentralbewegung der Ebene $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y})$" mit der „Zielkurve" $\mathfrak{z}(t)$. Die Parameter, für die (3. 12) gilt, nennen wir deshalb *Zentralparameter*, die zugehörigen Bezugssysteme *Zentralsysteme*. Da der Normalkreis eines Zentralsystems Schmiegkreis der Kurve $\mathfrak{y}(t)$ ist, könnten wir die Kurven $\mathfrak{y}(t)$ der Zentralsysteme auch *Möbius-Evoluten* der gegebenen Kurven nennen. Diese Kurven sind einfach die Orthogonaltrajektorien der Schmiegkreisschar.

4. Isogonalkurven von Kreisbüscheln.

Wir wollen uns jetzt mit der Frage beschäftigen, invariant mit einer Kurvenstelle verbundene Kreisbüschel anzugeben, die von der Kurve in möglichst hoher Ordnung unter einem gegebenen Winkel γ durchsetzt werden. Diese Aufgabe läuft darauf hinaus, Isogonalkurven von Kreisbüscheln, sogenannte Loxodromen, zu bestimmen, die die Ausgangskurve möglichst gut berühren. Wir betrachten diese Frage im projektiven Bildraum — bekannte Sätze der Projektivgeometrie liefern sofort die Lösung.

Wir denken uns mit jedem Punkt der Kurve ein Linienelement verbunden, das mit der Kurve einen bestimmten Winkel γ bildet. Ein solches Linienelement wird durch ein ausgeartetes Kreisbüschel gegeben, dessen Kreise das Linienelement berühren. Uns wird besonders der Fall interessieren, daß der Winkel γ längs der Kurve konstant ist.

Im Bildraum entspricht einem Linienelement ein lineares Kegelschnittbüschel auf der Quadrik Q. Die Ebenen dieser Kegelschnitte haben eine Gerade g gemeinsam, die Q im Punkt $\mathfrak{x}$ berührt. Wie üblich kennzeichnen wir unser Kegelschnittbüschel durch die zu g reziproke Gerade $\bar{g}$. Insgesamt wird also eine einparametrige Schar von Linienelementen durch eine einparametrige Schar von Geraden $\bar{g}$ repräsentiert, die entlang der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ eine Berührregelfläche der Quadrik Q bildet. Analytisch ist das Kegelschnittbüschel bzw. die erzeugende Gerade der Berührregelfläche durch

$$\mu\mathfrak{x} + \mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z} \quad \text{mit} \quad \hat{\gamma} = -\operatorname{cotg}\gamma \tag{4. 1}$$

gegeben. μ ist der Büschelparameter.

Eine Kurve auf dieser Regelfläche hat zum Urbild eine Kreisschar, gebildet aus Kreisen, die die γ-Linienelemente berühren. Der erzeugende Kreis dieser Kreisschar schneidet den zugehörigen Schmiegkreis in einem zweiten Punkt, und wir können die Parameterverteilung auf der Kurve so wählen, daß $\mathfrak{y}(t)$ die so entstehende Schnittpunktkurve durchläuft.

Welcher Kreis des Büschels (4. 1) geht durch $\mathfrak{y}$? Das skalare Produkt von $\mathfrak{y}$ und (4. 1) muß verschwinden und dies führt nach (2. 23) auf $\mu = 0$. Bei geeigneter Wahl der Parameterverteilung stellt also

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z} \tag{4. 2}$$

die Kurve der Regelfläche (4. 1) dar, die wir betrachten wollen. (Man kann dies direkt so einsehen: Bei Parametertransformation geht (4. 2) nach (2. 38) über in

$$\mathfrak{q}^* = \mathfrak{t}^* + \hat{\gamma}\mathfrak{z}^* = 2A\mathfrak{x} + \mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z}$$

und indem man wieder $A(t)$ aus der Differentialgleichung des Typs (3. 3) bestimmt, läßt sich erreichen, daß $\mathfrak{q}^*$ eine vorgegebene Kurve der Regelfläche (4. 1) durchläuft.)

Wann ist $\mathfrak{q}(t)$ eine Asymptotenlinie der Regelfläche $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z})$? Hierfür ist

$$\mathfrak{q}'' \equiv 0 \bmod \mathfrak{x}, \mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z}, \mathfrak{q}'$$

kennzeichnend. Für konstantes $\hat{\gamma}$ folgt wegen

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}' &= \mathfrak{y} + (a + \hat{\gamma}b)\,\mathfrak{x} \\ \mathfrak{q}'' &= b\mathfrak{z} + (2a + \hat{\gamma}b)\,\mathfrak{t} + (a + \hat{\gamma}b)\,\mathfrak{x} \end{aligned} \tag{4. 3}$$

hieraus

$$2a + b(\hat{\gamma} - \hat{\gamma}^{-1}) = 0. \tag{4. 4}$$

Die Kurve des Bildraumes $\mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z}$ *ist dann und nur dann eine Asymptotenlinie der Regelfläche* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z})$, *wenn* (4. 4) *gilt, d. h. nach* (3. 11) *wenn der zugrunde gelegte Parameter ein* α*-Isogonalparameter mit*

$$-\operatorname{cotg} \alpha = \hat{\alpha}, \quad \hat{\alpha} = \tfrac{1}{2}\,(\hat{\gamma} - \hat{\gamma}^{-1}) \tag{4. 5}$$

ist. Im Urbild bedeutet dies, daß $\mathfrak{y}(t)$ die Schmiegkreisschar unter dem Winkel α, der sich nach (4. 5) berechnet, durchsetzt.

Im Hinblick auf die Möbiusgeometrie haben die Asymptotenlinien einer Regelfläche des Bildraumes deshalb Interesse, weil ihre Tangenten durch die Eigenschaft ausgezeichnet sind, *drei* aufeinanderfolgende Erzeugende der Regelfläche zu treffen. Dies bedeutet für das Urbild in unserem Spezialfall: $(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}')$ mit (4. 4) definiert an der betrachteten Kurvenstelle ein Kreisbüschel, das aus einem jeden von drei aufeinanderfolgenden γ-Linienelementen je einen Kreis enthält. Wir nennen ein solches Büschel (es gilt (4. 4)!)

$$(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}') = (\mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z},\ \mathfrak{y} + \tfrac{1}{2}b(\hat{\gamma} + \hat{\gamma}^{-1})\,\mathfrak{x}) \tag{4. 6}$$

deshalb ein *γ-Büschel* der Kurvenstelle. Kürzer, aber weniger genau können wir dann sagen: *Die Ausgangskurve schneidet drei aufeinanderfolgende Kreise eines γ-Büschels unter dem Winkel γ, und nur diese Büschel haben an einer bestimmten Stelle diese Eigenschaft.*

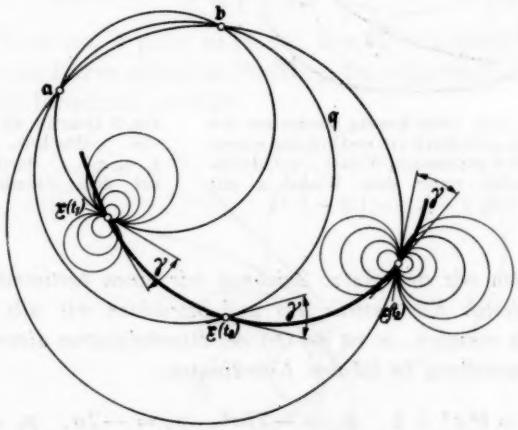


Fig. 7. γ_3-Büschel. Die γ-Linienelemente in den Nachbarpunkten $\mathfrak{x}(t_1)$ und $\mathfrak{x}(t_2)$ einer Kurvenstelle $\mathfrak{x}(t_0)$ enthalten je einen Kreis des Büschels.

Die Büschelzentren eines γ-Büschels werden von der zu $(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}')$ reziproken Geraden $(\mathfrak{z} - \hat{\gamma}\mathfrak{t},\ \mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}b(\hat{\gamma} + \hat{\gamma}^{-1})\,\mathfrak{x})$ aus der Quadrik Q ausgeschnitten. Es sind dies die Punkte

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \hat{\gamma}\mathfrak{t} - \mathfrak{z} + \sigma_0[\mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}b(\hat{\gamma} + \hat{\gamma}^{-1})\,\mathfrak{x}], \\ \mathfrak{b} &= \hat{\gamma}\mathfrak{t} - \mathfrak{z} - \sigma_0[\mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}b(\hat{\gamma} + \hat{\gamma}^{-1})\,\mathfrak{x}], \end{aligned} \tag{4. 7}$$

wobei σ_0 die positive Wurzel der Gleichung

$$\sigma^2 b + \hat{\gamma} = 0 \tag{4. 8}$$

bedeutet: *Die Büschelzentren der γ-Büschel ordnen sich also längs der Ausgangskurve $\mathfrak{x}(t)$ zu Paaren $\mathfrak{a}(t)$, $\mathfrak{b}(t)$, γ-Kurven genannt.*

Die zu $\mathfrak{q}$ polare Ebene $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \hat{\gamma}\mathfrak{t} - \mathfrak{z})$ schneidet aus Q den erzeugenden Kreis des γ-Büschels aus. Auf ihm liegen die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Wegen

$$\mathfrak{a}' \equiv 0 \bmod \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \hat{\gamma}\mathfrak{t} - \mathfrak{z}, \qquad \mathfrak{b}' \equiv 0 \bmod \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \hat{\gamma}\mathfrak{t} - \mathfrak{z}$$

berührt der erzeugende Kreis $\mathfrak{q}$ das zugehörige γ-Kurvenpaar. *Durchläuft $\mathfrak{y}$ eine α-Isogonaltrajektorie der Schmiegkreisschar, so hüllt die Kreisschar, gebildet aus den Kreisen durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, die an jeder Stelle mit dem Schmiegkreis den Winkel $\gamma =$ konst. bilden, ein γ-Kurvenpaar ein, falls* (4. 5) *gilt, und nur die genannten Kreisscharen haben diese Eigenschaft.*

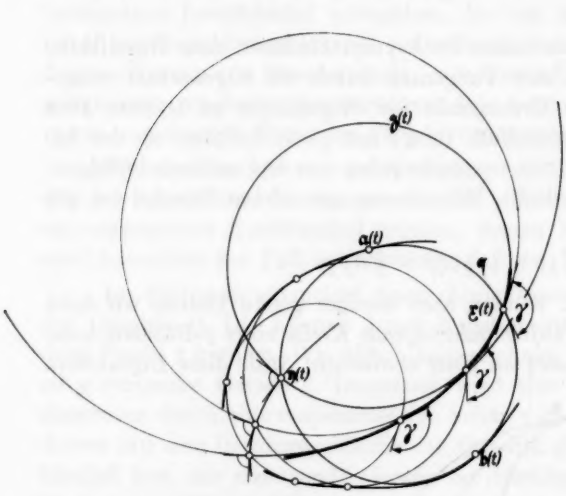


Fig. 8. γ-Kurvenpaar $\mathfrak{a}(t)$, $\mathfrak{b}(t)$. Diese Kurven werden von den Kreisen $\mathfrak{q}(t)$ eingehüllt. $\mathfrak{q}(t)$ geht durch $\mathfrak{x}(t)$ und $\mathfrak{y}(t)$ und schneidet die Ausgangskurve unter konstantem Winkel γ. $\mathfrak{y}(t)$ durchsetzt die Schmiegkreisschar unter dem Winkel α mit $-\operatorname{cotg}\alpha = \hat{\alpha}$, $-\operatorname{cotg}\gamma = \hat{\gamma}$, $\hat{\alpha} = \frac{1}{2}(\hat{\gamma} - \hat{\gamma}^{-1})$.

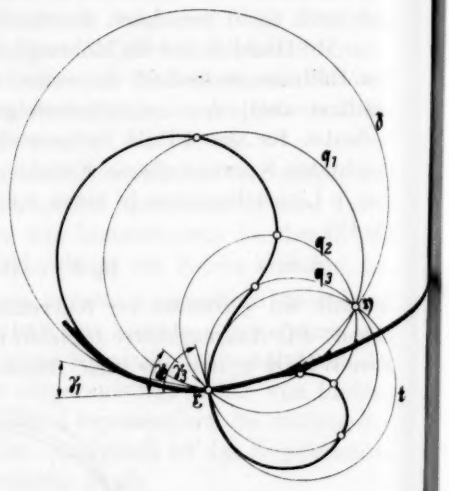


Fig. 9. Quartik als Ort aller Büschelzentren von γ_3-Büscheln, deren erzeugende Kreise $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \ldots$ durch einen festen Punkt $\mathfrak{y}$ auf dem Schmiegkreis der Kurvenstelle gehen.

Ferner beweisen wir den Satz: *Zeichnen wir einen bestimmten Punkt $\mathfrak{y}$ auf dem Schmiegkreis einer festen Kurvenstelle aus und betrachten wir alle γ-Büschel, die einen Kreis durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ schicken, so ist der Ort der Büschelzentren dieser γ-Büschel die Kurve mit der Parameterdarstellung in lokalen Koordinaten:*

$$p_0 = b^2\sigma^4 + 1, \quad p_1 = -2b\sigma^3, \quad p_2 = -2\sigma, \quad p_3 = 2\sigma^2. \tag{4. 9}$$

Diese Kurve hat einen Doppelpunkt im Kurvenpunkt; die Schmiegkreise an die beiden Äste der Kurve fallen mit Schmieg- und Normalkreis der Ausgangskurve zusammen. Die Kurve geht durch eine Möbiusabbildung, die den Doppelpunkt in den unendlich fernen Punkt der Möbiusebene bringt, in eine orthogonale Hyperbel über.

Die Parameterdarstellung (4. 9) gewinnt man aus (4. 7), indem man dort $\hat{\gamma}$ mittels (4. 8) eliminiert. Für $\sigma = 0$ und $\sigma = \infty$ wird der Punkt $(1, 0, 0, 0)$, d. h. der Kurvenpunkt $\mathfrak{x}$,

angenommen. Durch Differentiation nach σ bzw. $\frac{1}{\sigma}$ bestätigt man die angegebene Eigenschaft der Schmiegkreise in diesem Punkt. Ferner geht (4. 9) durch die Möbiusabbildung

$$\hat{p}_0 = p_3,\ \hat{p}_1 = p_1,\ \hat{p}_2 = -p_2,\ \hat{p}_3 = p_0$$

über in

$$\hat{p}_0 = 2\sigma^2,\ \hat{p}_1 = -2b\sigma^3,\ \hat{p}_2 = 2\sigma,\ \hat{p}_3 = b^2\sigma^4 + 1. \tag{4. 10}$$

Identifizieren wir die $\hat{p}_i$ in (4. 10) mit den p_i des Abschnitts 1, so folgt nach (1. 1) für die cartesischen Koordinaten des Punktortes (4. 10):

$$\xi_1 = -b\sigma;\ \xi_2 = \frac{1}{\sigma}$$

oder

$$\xi_1\xi_2 = -b, \tag{4. 11}$$

wie behauptet wurde.

Ferner fragen wir nach dem Ort der Büschelzentren aller γ-Büschel bei festem γ. Ihn zu bestimmen nehmen wir an, wir hätten in einem neuen Koordinatensystem nach (4. 7) und (4. 8):

$$\hat{\gamma}^*\mathfrak{t}^* - \mathfrak{z}^* + \sigma^*[\mathfrak{y}^* - \tfrac{1}{2}b^*(\hat{\gamma}^* + \hat{\gamma}^{*-1})\,\mathfrak{x}^*], \tag{4. 12}$$

$$\sigma^{*2}b^* + \hat{\gamma}^* = 0 \tag{4. 13}$$

die Büschelzentren bestimmt, und gehen jetzt zurück auf das alte System. Dann wird aus (4. 12), (4. 13):

$$\hat{\gamma}(\mathfrak{t} + A\mathfrak{x}) - \mathfrak{z} + \sigma[\mathfrak{y} + 2A\mathfrak{t} + 2A^2\mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}b(\hat{\gamma} + \hat{\gamma}^{-1})\,\mathfrak{x}], \tag{4. 14}$$

$$\sigma^2 b + \hat{\gamma} = 0. \tag{4. 15}$$

(4. 14) gibt in Abhängigkeit von A die Parameterdarstellung eines Kegelschnittes, dem im Urbild ein Kreis entspricht. Dieser Kreis ist gekennzeichnet durch

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{x} - \sigma\mathfrak{z}, \tag{4. 16}$$

denn $\mathfrak{h}$ ist für jeden Wert von A polar zu (4. 14). Der Kreis $\mathfrak{h}$ berührt den Schmiegkreis der Kurve, und damit die Kurve selbst, im Punkte $\mathfrak{x}$. Da sich σ in (4. 16) aus der quadratischen Gleichung (4. 15) berechnet, so folgt:

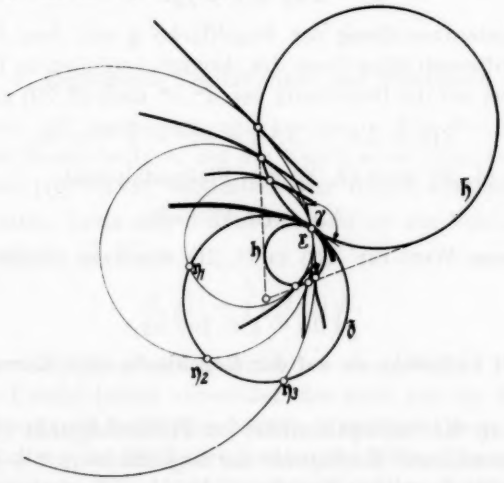


Fig. 10. Paar von Hauptkreisen $\mathfrak{h}, \bar{\mathfrak{h}}$ an einer Kurvenstelle $\mathfrak{x}$ für festes γ. $\bar{\mathfrak{h}}$ geht durch Spiegelung von $\mathfrak{h}$ am Schmiegkreis $\mathfrak{z}$ hervor.

Der Ort der Büschelzentren aller γ-Büschel einer Kurvenstelle bei festem γ ist ein Paar von Kreisen (4. 16) *mit* (4. 15), *die sich und die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ im Punkte $\mathfrak{x}$ berühren. Diese Kreise werden γ-Hauptkreise genannt.* (4. 14) *gibt in Abhängigkeit von A eine Parameterdarstellung der γ-Hauptkreise.*

Weiter zeigen wir: *Die beiden zusammengehörenden Hauptkreise gehen durch eine Inversion am Schmiegkreis auseinander hervor. Eine Inversion am Schmiegkreis $\mathfrak{z}$ bedeutet im Bildraum eine Projektivspiegelung an $\mathfrak{z}$ und seiner Polarebene* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y})$. Zwei Punkte $\mathfrak{x} - \sigma_1\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x} - \sigma_2\mathfrak{z}$ entsprechen sich in dieser Projektivspiegelung, falls $\sigma_1 = -\sigma_2$ gilt. Dies ist aber für die Lösungen der quadratischen Gleichung (4. 15) der Fall.

Ferner sieht man: *Die γ-Kurven durchsetzen die Schar der γ-Hauptkreise unter dem Winkel γ. Gilt* (4. 4), *so werden die γ-Kurven in Abhängigkeit von t durch* (4. 14) *mit konstantem γ und konstantem A dargestellt.*

Die Tangente an die Asymptotenlinie des R_3 trifft dann und nur dann vier aufeinanderfolgende Erzeugende der Regelfläche, wenn die zugehörige Asymptotenlinie dort einen Wendepunkt hat. Man spricht von den *Fleknodalpunkten* und den *Fleknodalgeraden* der entsprechenden Erzeugenden.

Für einen Fleknodalpunkt der Regelfläche $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z})$ gilt also neben (4. 4)

$$\mathfrak{q}'' \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$$

und also nach (4. 3)

$$(a + \hat{\gamma}\, b)' = 0, \tag{4. 17}$$

und dies geht unter Benützung von (4. 4) (bei $\hat{\gamma} = \text{const}$) über in:

$$b'(\hat{\gamma} + \hat{\gamma}^{-1}) = 0. \tag{4. 18}$$

In dem transformierten Bezugssystem lauten die Gleichungen (4. 4) bzw. (4. 18)

$$2a^* + b^*(\hat{\gamma} - \hat{\gamma}^{-1}) = 0, \tag{4. 19}$$

$$\frac{db^*}{dt^*} = 0, \tag{4. 20}$$

und $\mathfrak{q}^*$ durchläuft auf der Regelfläche $\mathfrak{g} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z})$ die Kurve

$$2A\mathfrak{x} + \mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z}. \tag{4. 21}$$

Dies ist eine Parameterdarstellung der Regelfläche $\mathfrak{g}$ mit dem Parameter A auf der Erzeugenden. Die Differentialgleichung der Asymptotenlinien in (4. 21) finden wir aus (4. 19), indem wir dort auf die Bedeutung von a^*, b^* nach (2. 39) zurückgehen, zu

$$2(a + 2A' - 2A^2) + b(\hat{\gamma} - \hat{\gamma}^{-1}) = 0.$$

Entsprechend liefert (4. 20) nach (2. 39) den Fleknodalpunkt

$$4A - (\ln b)' = 0. \tag{4. 22}$$

Indem wir diesen Wert für $A(t)$ in (4. 21) einsetzen, ergibt sich für jedes t der Fleknodalpunkt

$$\tfrac{1}{4}(\ln b)'\mathfrak{x} + \mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z}. \tag{4. 23}$$

In Abhängigkeit von t entsteht so auf der Regelfläche eine Kurve, die man *Fleknodalkurve* nennt.

Die Tangente an die Asymptotenlinie im Fleknodalpunkt (4. 23) trifft nicht nur drei, sondern vier benachbarte Erzeugende der Regelfläche $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z})$. Im Urbild gehört also zu dieser Tangente ein solches Kreisbüschel (dessen Zentren ergeben sich wieder aus (4. 14), worin jetzt $A = \frac{1}{4}(\ln b)'$ zu setzen ist), das durch vier aufeinanderfolgende γ-Linien-

elemente je einen Kreis sendet. Wir sprechen deshalb von einem γ_4-*Büschel.* (4. 14) *mit* (4. 22) *stellt für jeden Wert von* γ *in einem beliebigen Bezugssystem die* γ_4-*Büschel dar.*

Wir denken uns jetzt von vornherein den Parameter t so gewählt, daß $b = \text{const}$ ist. In diesem Bezugssystem vereinfacht sich die Gleichung (4. 22) zu $A = 0$ und wir finden die zu dem Fleknodalpunkt, der jetzt durch $\mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z}$ dargestellt wird, gehörigen γ_4-Büschelzentren aus (4. 14), wenn wir dort $A = 0$ setzen.

Zu jeder Parameterverteilung gehört ein bestimmter Punkt des Bezugssystems auf dem Schmiegkreis. Für den Punkt $\mathfrak{y}$, der zu dem invarianten Parameter mit $b = \text{const}$ gehört, finden wir so die folgende geometrische Kennzeichnung: Für jedes γ geht der Kreis $\hat{\gamma}\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ des γ_4-Büschels durch den Punkt $\mathfrak{y}$. *Zusammengehörende Büschelzentren der* γ_4-*Büschel liegen auf Kreisen durch* $\mathfrak{x}$, *die wiederum ein Kreisbüschel bilden. Das zweite Büschelzentrum dieses Kreisbüschels liegt auf dem Schmiegkreis der Ausgangskurve. Legen wir den Punkt* $\mathfrak{y}$ *des Bezugssystems in diesen Punkt, so gilt an dieser Stelle* $b' = 0$.

Anders ausgedrückt: *Mit einer Kurve ist Möbius-invariant ein Punkt* $\mathfrak{y}$ *des Schmiegkreises verbunden — zusammengehörende Büschelzentren aller* γ_4-*Büschel der Kurvenstelle liegen auf Kreisen durch* $\mathfrak{x}$ *und diesem Punkt* $\mathfrak{y}$. Es ist dies der Punkt des Schmiegkreises, der zu dem invarianten Parameter (2. 36) gehört. Wir nennen ein Bezugssystem mit $b = \text{const}$ deshalb auch *invariantes Bezugssystem.*

Der Punktort (4. 9) bezogen auf das invariante Bezugssystem ist dann ebenfalls invariant mit der Kurvenstelle verbunden. Dieser Punktort wird erzeugt von den Büschelzentren aller γ_4-Büschel. Wie wir oben sahen, stellt dieser Punktort das Möbiusbild einer orthogonalen Hyperbel dar. Wir werden unten (Abschnitt 5, Bem. c) durch andere geometrische Überlegungen auf diesen Punktort zurückkommen und damit eine weitere geometrische Konstruktion des invarianten Bezugssystems geben.

Hierzu kann man auch die Tatsache verwenden (wir werden sie gleich beweisen): *Für ein festes* γ *hüllen die beiden zugehörigen* γ-*Hauptkreise* (4. 16) *mit* (4. 15) *außer der Ausgangskurve selbst je eine Kurve ein. Die erzeugenden Punkte dieser beiden Kurven sind die Büschelzentren des* γ-*Büschels für den vorgegebenen Wert von* γ. Zum Beweis zeigt man, daß bei $b' = 0$ nicht nur $\mathfrak{y}$, sondern auch $\mathfrak{y}'$ zu den Punkten (4. 7) mit (4. 8) polar ist. Hierzu braucht man (4. 8) und die Tatsache, daß nach (4. 8) mit γ und b auch σ eine Konstante ist.

5. Ergänzende Bemerkungen und Ergebnisse.

a) Ist die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ geschlossen und konvex in dem Sinne, daß durch je zwei Punkte der Kurve ein Kreis existiert, der die Kurve sonst nicht trifft, so gilt der *Vierscheitelsatz*: Die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ besitzt mindestens vier Stellen stationären Schmiegkreises.

Stellt $\mathfrak{k}$ einen festen Kreis oder Punkt dar und ist der Vektor $\mathfrak{k}$ konstant, so gilt nach der letzten Gleichung (2. 33)

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{z}]\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} b[\mathfrak{k}, \mathfrak{x}]\, dt. \tag{5. 1}$$

Die linke Seite dieser Gleichung verschwindet bei einem vollen Durchlauf der Kurve. Indem man dann für $\mathfrak{k}$ einen Punkt verwendet, der nicht auf der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ liegt, sieht man, daß $b(t)$ mindestens zwei Nullstellen besitzt. Identifiziert man dann $\mathfrak{k}$ mit dem Kreis durch diese beiden Stellen, der die Kurve sonst nicht trifft — er existiert nach Voraussetzung —, so folgt wieder aus (5. 1), daß noch zwei weitere Nullstellen von b existieren müssen. (Wie auch bei den anderen Beweisen mittels des Verfahrens nach Herglotz

benötigt man in Wirklichkeit nur die Existenz eines Kreises, der die Kurve sonst nicht trifft, durch die beiden, bereits nachgewiesenen Stellen mit $b = 0$. Da man jedoch deren Lage nicht kennt, fordert man einen sochen Kreis für je zwei Punkte der Kurve.) Damit ist nachgewiesen, daß es längs der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ mindestens vier Stellen mit $b = 0$, d. h. mindestens vier Stellen stationären Schmiegkreises gibt.

b) Die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ ist genau dann Schnittkurve eines Büschels von Quadriken, dem die absolute Quadrik angehört, wenn, bezogen auf den invarianten Parameter $b = \text{const}$,

$$5a'\Phi' - 5a''\Phi - \Phi^2 + 20aa'^2 = 0 \tag{5. 2}$$

ist. Hierin ist zur Abkürzung

$$21\Phi = 15a'' + 72a^2 + 200b^2$$

gesetzt. Die Gleichung (5. 2) ist die natürliche Gleichung der Kurven vierter Ordnung erster Art, die auf der absoluten Quadrik liegen. Das Quadrikbüschel wird außer von der absoluten Quadrik von

$$\begin{aligned} 150a'bp_0p_2 - 30b\Phi p_1p_2 - 50a'b^2p_1p_3 + (18a\Phi - 15a'^2)\,p_2^2 \\ - 30a'abp_2p_3 + 20b^2\Phi p_3^2 = 0 \end{aligned} \tag{5. 3}$$

aufgespannt.

Zum Beweis versucht man, Quadriken

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{p}\rangle = \sum_{i,k=0}^{3} a_{ik}p_ip_k = 0, \quad a_{ik} = a_{ki}$$

zu bestimmen, die die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ in achter Ordnung berühren. Ist $f(t) = \frac{1}{2}\langle \mathfrak{x}(t), \mathfrak{x}(t)\rangle$, so legen die Bedingungen

$$f = f' = f'' = \cdots = f^{(7)} = 0 \tag{5. 4}$$

ein Quadrikbüschel fest, das von der absoluten Quadrik und von (5. 3) aufgespannt wird. Dieses Büschel ist genau dann längs der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ fest, wenn $f^{(8)} = 0$ ist. Diese Bedingung führt auf (5. 2). Zur Berechnung von (5. 3) mittels (5. 4) benötigt man die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
f &= \tfrac{1}{2}\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle \\
f' &= \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{t}\rangle \\
f'' &\equiv \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle + \langle \mathfrak{t}, \mathfrak{t}\rangle \bmod f \\
f''' &\equiv b\,\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle + 3\,\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{y}\rangle \bmod f, f' \\
f^{(4)} &\equiv 4b\,\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{z}\rangle + 3\,\langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y}\rangle \bmod f, f', f'' \\
f^{(5)} &\equiv 10b\,\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{y}\rangle + 2ab\,\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle \bmod f, f', f'', f''' \\
f^{(6)} &\equiv 2a'b\,\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle - 10b^2\,\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{t}\rangle + 10b^2\,\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle - 9a\,\langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y}\rangle \bmod f, f', f'', f''', f^{(4)} \\
f^{(7)} &\equiv \left(2a''b + \frac{48}{5}a^2b + \frac{80}{3}b^3\right)\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle - \frac{21}{2}a'\,\langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y}\rangle \bmod f, f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)} \\
f^{(8)} &\equiv \left(2a'''b + \frac{152}{5}a'ab\right)\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle - \left(12a'' - \frac{36}{5}a^2 + 20b^2\right)\langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y}\rangle \\
&\qquad \bmod f, f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)},
\end{aligned} \tag{5. 5}$$

die man der Reihe nach mittels der Ableitungsgleichungen (2. 33) für $b = \text{const.}$ erhält.

Man kennzeichne durch Anwendung der Elementarteilertheorie die verschiedenen Typen von Kurven vierter Ordnung erster Art differentialgeometrisch. Zu diesen Kurven gehören insbesondere die Bilder der Quartiken (vgl. die folgende Bemerkung).

c) *Quartiken.* Gegeben seien zwei ausgeartete Kreisbüschel, deren Kreise alle durch einen Punkt $\mathfrak{x}$ gehen; die Linienelemente, die durch die beiden Kreisbüschel in $\mathfrak{x}$ aus-

gezeichnet sind, mögen einen Winkel $\varphi \neq 0$ miteinander bilden. Bezieht man die beiden Kreisbüschel projektiv aufeinander und bringt man zusammengehörende Kreise zum Schnitt, so entsteht eine Kurve, die wir kurz *Quartik* nennen wollen. Sie besitzt in $\mathfrak{x}$ einen Doppelpunkt. Ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so sprechen wir von einer orthogonalen Quartik. Alle Quartiken mit demselben φ sind Möbius-geometrisch gleichwertig. Eine Quartik ist nach Auszeichnung ihres Doppelpunktes und ihrer Doppelpunkttangenten durch drei Parameter bestimmt.

Das Bild einer Quartik wird im Bildraum von einem Kegel aus der absoluten Quadrik ausgeschnitten. Die Kegelspitze liegt auf der absoluten Quadrik und ist das Bild des Doppelpunktes der Quartik. Die Tangentenebene an die absolute Quadrik in der Kegelspitze schneidet den Kegel in zwei Erzeugenden, die genau dann bezüglich der absoluten Quadrik zueinander polar sind, wenn die Quartik orthogonal ist.

Mit einer allgemeinen Kurve $\mathfrak{x}(t)$ ist an jeder Stelle eine orthogonale Quartik (4.9) lokal invariant verbunden. Die Schmiegkreise an die beiden Äste im Doppelpunkt $\mathfrak{x}(t)$ fallen mit Schmieg- und Normalkreis der Ausgangskreise im Punkt $\mathfrak{x}(t)$ zusammen.

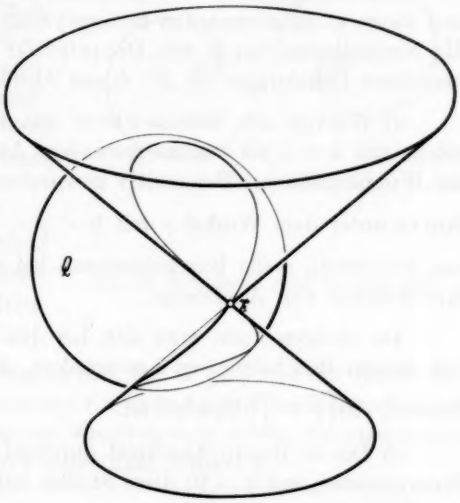


Fig. 11. Quartik als Schnittkurve der Quadrik Q mit einem Kegel, dessen Spitze auf Q liegt.

Wir wollen jetzt mit der Ausgangskurve lokal verknüpfte Quartiken so bestimmen, daß ihr Doppelpunkt im Kurvenpunkt $\mathfrak{x}(t)$ liegt, und einer ihrer Äste die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ in 5. oder 6. Ordnung berührt. Hierzu bestimmen wir diejenigen Quadriken, die die Bildkurve $\mathfrak{x}(t)$ in 5. Ordnung berühren und sondern aus diesen die Kegel mit der Spitze im Kurvenpunkt $\mathfrak{x}(t)$ aus. Mit der Bezeichnungsweise von Bemerkung b) gilt also einmal

$$f = f' = f'' = f''' = f^{(\mathrm{IV})} = f^{(\mathrm{V})} = 0,$$

zum anderen, da $\mathfrak{x}$ Kegelspitze ist,

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{t} \rangle = \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z} \rangle = \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = 0.$$

In lokalen Koordinaten führt dies auf

$$3 p_1 p_2 + 3 \hat{\varphi} p_2^2 - 2 b p_3^2 = 0.$$

Hierin ist $\hat{\varphi} = -\operatorname{cotg} \varphi$ freier Parameter. Für die Schnittkurve dieses Kegels mit der absoluten Quadrik erhalten wir die Parameterdarstellung:

$$\left(1 + \left(\frac{2}{3} b s^2 - \hat{\varphi}\right)^2, \ \frac{4}{3} b s^3 - 2 \hat{\varphi} s, \ 2 s, \ 2 s^2\right).$$

Unter diesen, die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ in 5. Ordnung berührenden Quartiken gibt es genau eine orthogonale und eine, die sogar in 6. Ordnung berührt.

Für die orthogonale Quartik ist $\hat{\varphi} = 0$. Sie erlaubt die Kennzeichnung des invarianten Bezugssystems: Der Schmiegkreis an den anderen Ast ist der Normalkreis des invarianten Bezugssystems. Diese Quartik spannt zusammen mit der Quartik (4.9)

ein Büschel orthogonaler Quartiken auf, dem als ausgeartete Elemente der doppelt-zählende Kurvenpunkt $\mathfrak{x}$ (im Bildraum: doppelt-zählende Tangentenebene in $\mathfrak{x}$ an die Quadrik) und das Kreispaar $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ des invarianten Bezugssystems angehört. Das Doppelverhältnis dieser vier Elemente des Büschels ist die numerische Konstante $\frac{3}{2}$.

Für die in 6. Ordnung berührende Quartik muß zusätzlich $f^{(6)} = 0$ sein, und dies führt nach (5. 5) auf $\hat{\varphi} = \frac{3}{5} \cdot \frac{a}{b}$. Damit ist eine Kennzeichnung der Invariante $\frac{a}{b}$ mittels des Winkels φ ($-\hat{\varphi} = \operatorname{cotg} \varphi$) gegeben, den die Schmiegkreise der beiden Äste im Doppelpunkt der in 6. Ordnung berührenden Quartik miteinander bilden.

Man kennzeichne die Quartiken durch Beziehungen zwischen ihren Invarianten und zwar: a) im invarianten Bezugssystem $b = \text{const}$; b) in dem Bezugssystem, in dem die Normalkreise durch den Doppelpunkt der Quartik gehen (vgl. Bemerkung i), insbesondere Gleichungen (5. 26) dieses Abschnitts).

d) Kurven der Möbius-Ebene mit $b > 0$ bezeichnet man als *positiv gewunden*, solche mit $b < 0$ als *negativ gewunden*. Aus (4. 8) folgt die *geometrische Kennzeichnung des Windungssinnes*: Bei positiv gewundenen Kurven haben die γ-Büschel, die von der Kurve unter dem Winkel γ mit $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ durchsetzt werden (γ wird von der Kurve aus gemessen), reelle Büschelzentren, bei negativ gewundenen Kurven dagegen sind es Kreisbüschel von Apollonius.

Im übrigen kann man sich bei den durchgeführten Überlegungen auf γ-Büschel mit reellen Büschelzentren beschränken, da mit einem γ-Büschel das dazu orthogonale Büschel ein $\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right)$-Büschel ist.

e) Die in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen haben kein Interesse an Kurvenstellen mit $b = 0$; diese Stellen mit stationärem Schmiegkreis seien deshalb von der Betrachung ausgeschlossen.

Wie wir gesehen haben, gibt es an jeder Kurvenstelle ($b \neq 0$) zu vorgegebenem Winkelwert γ ein γ_4-Büschel mit der Eigenschaft, daß vier benachbarte Kreise des Büschels die Kurve unter dem gegebenen konstanten Winkel γ durchsetzen. Wir zeigen weiter, daß es zu jeder Kurvenstelle zwei Winkelwerte γ_0 bzw. $\gamma_0 + \frac{\pi}{2}$ gibt, so daß an dieser Stelle sogar fünf benachbarte Kreise des zu γ_0 gehörigen γ-Büschels die Kurve unter den konstanten Winkeln γ_0 bzw. $\gamma_0 + \frac{\pi}{2}$ durchsetzen. Ein solches γ-Büschel nennen wir ein *γ_5-Büschel.*

Im Bildraum wird ein solches γ_5-Büschel durch eine Gerade $\mathfrak{a}$ repräsentiert, die fünf benachbarte Erzeugende der Berührregelfläche $\mathfrak{g} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z})$ trifft. Wir bestimmen diese Gerade $\mathfrak{a}$ unter Verwendung des Geradenraumes des Bildraumes. Dort spannen die Punkte $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{g}'', \mathfrak{g}''', \mathfrak{g}^{(4)}$ eine Hyperebene auf, die den Schmiegkomplex der Regelfläche $\mathfrak{g}$ festlegt. Trifft die Gerade $\mathfrak{a}$ fünf benachbarte Geraden der Regelfläche, so trifft sie alle Geraden des Schmiegkomplexes. Dies bedeutet, daß der Schmiegkomplex in die Gesamtheit der Treffgeraden von $\mathfrak{a}$ entartet.

Nach den Ableitungsgleichungen (2. 33) ist für konstantes $\hat{\gamma}$:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) + \hat{\gamma}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}),\ \mathfrak{g}' = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \hat{\gamma}(\mathfrak{t}, \mathfrak{z}),\ \mathfrak{g}'' \equiv (b + \hat{\gamma}^2 b)(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) + (\mathfrak{t}, \mathfrak{z}) + \hat{\gamma}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \pmod{\mathfrak{g}}, \\
&\mathfrak{g}''' \equiv 2b(\mathfrak{t}, \mathfrak{z}) \pmod{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'}, \qquad \mathfrak{g}^{(4)} \equiv 2b[(a + \hat{\gamma} b)(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) + (\mathfrak{y}, \mathfrak{z})] \pmod{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{g}''}.
\end{aligned} \tag{5. 6}
$$

Daraus findet man den zu der Ebene $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{g}'', \mathfrak{g}''', \mathfrak{g}^{(4)})$ bezüglich der Kleinschen Quadrik des Geradenraumes polaren Punkt $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} = -(a + b\hat{\gamma})(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}) + (\hat{\gamma}a - b)(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) + (\mathfrak{t}, \mathfrak{y}) - \hat{\gamma}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}).$$

$\mathfrak{a}$ stellt den Schmiegkomplex dar. Er entartet genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ eine Gerade darstellt, wenn also $\mathfrak{a}$ auf der Kleinschen Quadrik liegt. Dies führt auf

$$(5.7) \qquad b\hat{\gamma}_0^2 + 2a\hat{\gamma}_0 - b = 0.$$

Der Winkelwert γ_0 ist im allgemeinen von der Kurvenstelle abhängig: $\gamma_0 = \gamma_0(t)$. Ist γ_0 konstant, und nur in diesem Fall, so ist das zugehörige γ_5-Büschel fest: $\mathfrak{a}' = \varrho\mathfrak{a}$; die Kurve durchsetzt dieses Büschel unter konstantem Winkel γ_0. Eine solche Kurve heißt *Loxodrome*. (5.7) lehrt, daß aus $b = \text{const}$, $\gamma_0 = \text{const}$ folgt $a = \text{const}$; die Loxodromen sind also durch $b = \text{const}$, $a = \text{const}$ gekennzeichnet. Für $a = 0$ ist nach (5.7) insbesondere $\gamma_0 = \frac{\pi}{4}$.

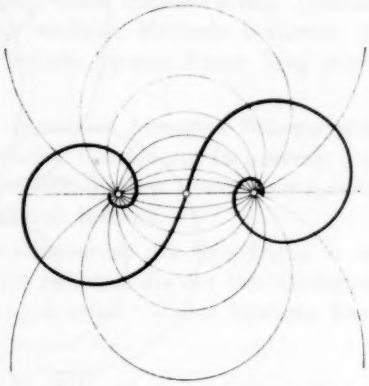


Fig. 12. Loxodrome eines Kreisbüschels.

f) Gelten die Aussagen über γ-Büschel nicht nur in der Grenze, sondern auch für benachbarte Punkte im strengen Sinne dieses Wortes? Hierüber geben die folgenden Sätze Auskunft:

(f 1) Es sei durch $\mathfrak{x}(t_0)$ ein Kreis $\mathfrak{k}(t_0)$ vorgegeben, der in $\mathfrak{x}(t_0)$ mit der Kurve den Winkel γ bildet. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Kreisbüschel mit den Eigenschaften: $\mathfrak{k}(t_0)$ gehört dem Kreisbüschel an; die Kreise des Kreisbüschels durch die vorgelegten Nachbarpunkte $\mathfrak{x}(t_1)$, $\mathfrak{x}(t_2)$ schneiden die Kurve unter dem Winkel γ.

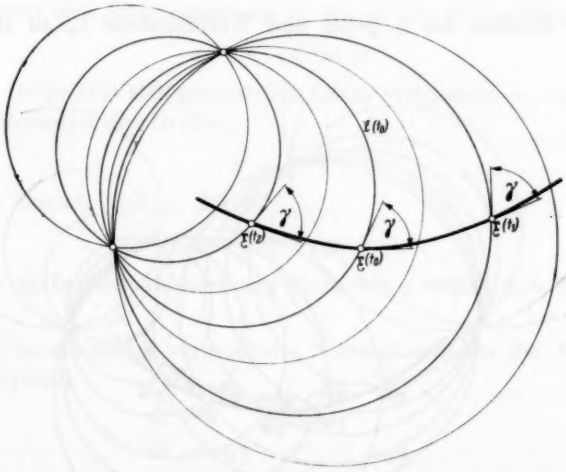


Fig. 13. Durchsetzt $\mathfrak{k}(t_0)$ die Kurve in $\mathfrak{x}(t_0)$ unter dem gegebenen Winkel γ, so gibt es genau ein Kreisbüschel, das $\mathfrak{k}(t_0)$ enthält und durch zwei Nachbarpunkte Kreise sendet, die die Kurve auch unter dem gegebenen Winkel γ schneiden.

(f 2) Es gibt genau zwei verschiedene (reelle) Kreisbüschel, deren Kreise die Ausgangskurve in den Nachbarpunkten $\mathfrak{x}(t_1)$, $\mathfrak{x}(t_2)$, $\mathfrak{x}(t_3)$, $\mathfrak{x}(t_4)$ unter dem festen Winkel γ

durchsetzen. Ist auch $\mathfrak{x}(t_0)$ eine Nachbarstelle, so geht mit t_i gegen t_0 in der Grenze das eine dieser beiden Büschel in das ausgeartete Büschel $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t} - \hat{\gamma}_\mathfrak{z})$ durch $\mathfrak{x}(t_0)$ über, das andere in das γ_4-Büschel der Stelle t_0.

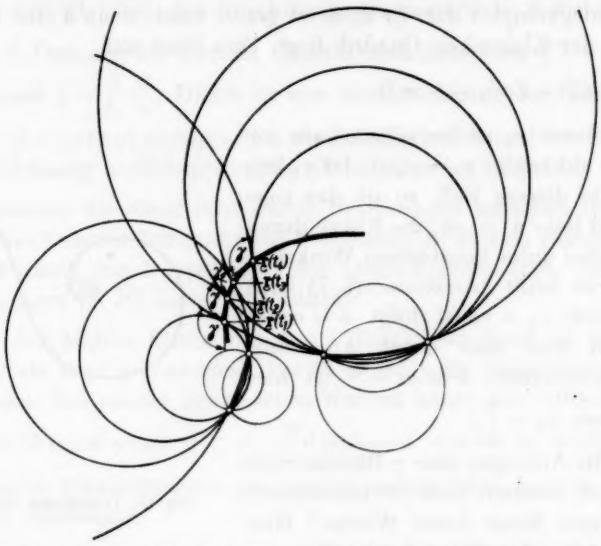


Fig. 14. Es gibt genau zwei Kreisbüschel, die von vier Linienelementen je einen Kreis enthalten.

(f 3) Zu fünf Nachbarstellen $t_1, \ldots, t_5$ einer Kurve der Möbius-Ebene gibt es genau zwei Winkelwerte γ_0 und $\gamma_0 + \frac{\pi}{2}$, so daß zwei zueinander senkrechte Kreisbüschel existieren, deren Kreise durch $\mathfrak{x}(t_1), \ldots, \mathfrak{x}(t_5)$ die Kurve unter dem Winkel γ_0 bzw. $\gamma_0 + \frac{\pi}{2}$ schneiden. Streben die t_i gegen eine Nachbarstelle t_0, so streben die Werte

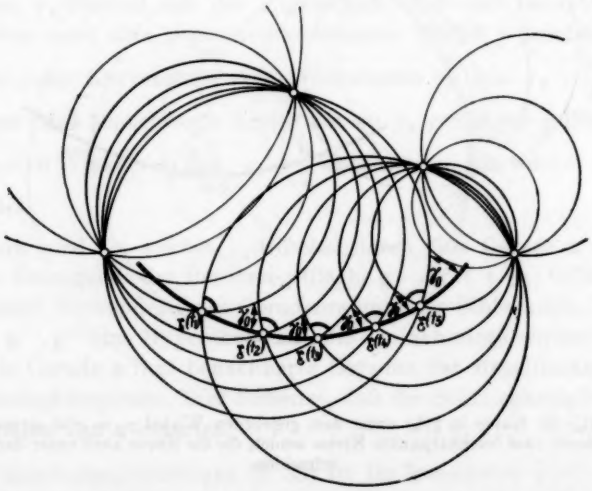


Fig. 15. Zu fünf Nachbarpunkten einer Kurve gibt es genau zwei Kreisbüschel mit der Eigenschaft, daß die Kreise aus einem solchen Kreisbüschel durch die fünf Punkte mit der Kurve jeweils ein- und denselben Winkel bilden. Dieser Winkel wird durch die Kurve und die Kurvenpunkte bestimmt. — Die Kreise aus verschiedenen Büscheln schneiden sich in den Kurvenpunkten senkrecht.

$\gamma_0, \gamma_0 + \frac{\pi}{2}$ gegen die Lösungen der Gleichung (5. 5), und die Kreisbüschel gehen in die γ_5-Büschel über.

Den Beweis von (f 1) kann man unmittelbar im Bildraum, den von (f 2) ohne Schwierigkeit im Geradenraum des Bildraumes führen. Der Beweis von (f 3) erfordert eine genauere Diskussion der Schar von Regelflächen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t} + \hat{\gamma}\mathfrak{z})$ mit dem Scharparameter $\hat{\gamma}$.

g) In der differentialgeometrischen Behandlung eines geometrischen Gebildes sind zwei Entwicklungslinien zu unterscheiden. Die Gaußsche Methode bestimmt ein begleitendes Bezugssystem aus dem geometrischen Gebilde heraus. Dieser Weg wurde auch in der vorliegenden Arbeit beschritten.

Die Methode von Darboux-Cartan betrachtet zuerst ein bewegtes Bezugssystem und paßt dann diese „Bewegung" dem zu untersuchenden Gebilde an. In unserem Fall besteht die *Grundfigur*, die dem bewegten Dreibein des euklidischen Raumes entspricht, aus zwei zueinander senkrechten (sich reell schneidenden) Kreisen.

Hier ergeben sich zwei Schwierigkeiten. Erstens bestimmt die Grundfigur — im Bildraum mögen zu ihr die Vektoren $\mathfrak{x}(t)$, $\mathfrak{t}(t)$, $\mathfrak{y}(t)$, $\mathfrak{z}(t)$ gehören, die der Produkttabelle (2. 23) und der Determinantenbedingung (2. 21) genügen sollen — eine bewegte Basis nicht eindeutig. Es sind noch die Umnormungen

$$\bar{\mathfrak{x}}(t) = \varrho(t) \cdot \mathfrak{x}(t), \quad \bar{\mathfrak{y}}(t) = \varrho^{-1}(t) \cdot \mathfrak{y}(t) \tag{5. 8}$$

zu beachten.

Zweitens gehört zu einem geometrischen Gebilde — bei uns zu einer Kurve $\mathfrak{x}(t)$ — nicht von vornherein eine eindeutig bestimmte Grundfigur. Mit der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ ist der Schmiegkreis $\mathfrak{z}(t)$ unmittelbar verbunden, nicht aber ein eindeutig bestimmter Normalkreis $\mathfrak{t}(t)$.

Der ersten Schwierigkeit hat man in der projektiven Differentialgeometrie zu begegnen gelernt: Man verwendet ein abgeändertes, halbinvariantes Differentiationsverfahren[8]). Hat man eine Differentialform π, für die bei den zulässigen Umnormungen

$$\bar{\pi} = \pi - d\,(\ln \varrho) \tag{5. 9}$$

gilt — eine solche Größe läßt sich geometrisch leicht bestimmen —, so definiert man das halbinvariante Differential der Größe g,

$$\bar{g} = \varrho^c g \tag{5. 10}$$

(man nennt c das *Gewicht* von g), durch

$$\bar{dg} = dg + cg\pi. \tag{5. 11}$$

Dann verhält sich $\bar{dg}$ bei der Umnormung (5. 8) wie g selbst, d. h. halbinvariant vom Gewicht c.

Ist dann $\mathfrak{t}(t)$ eine beliebig vorgegebene Normalkreisschar der Kurve $\mathfrak{x}(t)$, so gilt für das bewegte System

$$\begin{aligned} \bar{d\mathfrak{x}} &= \qquad\quad \omega_0 \mathfrak{t}, \\ \bar{d\mathfrak{t}} &= \omega_1 \mathfrak{x} \qquad\quad + \omega_0 \mathfrak{y}, \\ \bar{d\mathfrak{y}} &= \qquad + \omega_1 \mathfrak{t} \qquad\quad + \omega_2 \mathfrak{z}, \\ \bar{d\mathfrak{z}} &= \omega_2 \mathfrak{x}. \end{aligned} \tag{5. 12}$$

Dabei ist die Form π so gewählt, daß in der ersten dieser Gleichungen kein Glied mit $\mathfrak{x}$ auftritt.

---

[8]) Vgl. hierzu G. Bol [13].

Statt mit Differentialen zu arbeiten, ist es zweckmäßig, zu verallgemeinerten (halbinvarianten) Ableitungen überzugehen, indem man eine der Formen ω_0, ω_1, ω_2 als Basisform auswählt. Wir verwenden ω_0 als Basisform und definieren als halbinvariante Ableitung von g die Größe $\dot{g}$ mit

$$\bar{d}g = \dot{g}\omega_0. \tag{5.13}$$

Weiter setzen wir

$$\omega_1 = a\omega_0, \quad \omega_2 = b\omega_0. \tag{5.14}$$

(5.12) geht dann über in

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{x}} &= \mathfrak{t}, \\ \dot{\mathfrak{t}} &= a\mathfrak{x} + \mathfrak{y}, \\ \dot{\mathfrak{y}} &= a\mathfrak{t} + b\mathfrak{z}, \\ \dot{\mathfrak{z}} &= b\mathfrak{x}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Diese Gleichungen entsprechen formal völlig den Gleichungen (2.33). Es ist anzumerken, daß die Größen a und b das Gewicht -2 haben.

Man kann nun entweder in diesem noch zu allgemeinen bewegten System Geometrie treiben und zeigen, daß es geometrische Aussagen gibt, die es erlauben, den Normalkreis eindeutig festzulegen. Wir haben oben solche Aussagen angegeben. Oder man kann sich, vom mehr analytischen Standpunkt aus, die Transformationsformeln beim Übergang zu einer anderen Normalkreisschar ausrechnen. Die Basisvektoren des neuen Systems drücken sich im alten durch die Gleichungen (2.38) aus, wobei φ und A mit den dort angegebenen Bedeutungen nichts zu tun haben. Die neuen Basisvektoren genügen Gleichungen des Typs (5.15). Man findet für die Invarianten die Beziehungen

$$\dot{A} - 2A\varphi = 0, \; a^* = \varphi^{-2}(a + 2\dot{A} - 2A^2), \; b^* = \varphi^{-2}b. \tag{5.16}$$

Diese entsprechen den Relationen (2.8) und (2.39). Damit hat man eine Ausgangsposition gewonnen, die alle schon oben durchgeführten Überlegungen von neuem anzustellen gestattet.

Man hat aber noch mehr: Die ursprünglichen Gleichungen sind in diesen als Sonderfall enthalten. Man kann die halbinvarianten Ableitungen bei einer geeigneten Normierung jederzeit als gewöhnliche Ableitungen bezüglich einer vorgelegten Parameterverteilung betrachten. Hierzu hat man die Normierung so festzulegen, daß

$$\omega_0 = dt \tag{5.17}$$

gilt.

Auch im gesternten System kann man dies so einrichten und kann jedenfalls

$$\omega_0^* = dt^* \tag{5.18}$$

setzen. Zwischen den Parameterverteilungen und den beiden Systemen besteht aber dann eine bestimmte Beziehung. Es gilt

$$\omega_0^* = \varphi\omega_0 \quad \text{und also} \quad dt^* = \varphi dt. \tag{5.19}$$

Damit gewinnt auch $\varphi(t)$ seine ursprüngliche Bedeutung, wie sie in (2.8) definiert war, zurück.

Die Invariantentheorie der Raumkurven des Möbius-Raumes läßt sich entsprechend behandeln. Es kommen hier keine neuen Gesichtspunkte hinzu. Lediglich hat man, außer auf die Umnormungen (5.8) noch auf Umnormungen mit Konstanten zu achten. Diese sind leicht zu überblicken. (Man vergleiche die nachfolgende Bemerkung h).)

h) In Fortführung der Gedanken in Abschnitt 3 gelangt man unmittelbar zur Behandlung der Möbius-Geometrie der Raumkurven. Ist $\mathfrak{x}(t)$ eine Kurve einer Quadrik vom Typus der Kugel im projektiven vierdimensionalen Raum und sind die Vektoren $\mathfrak{t}(t)$, $\mathfrak{y}(t)$ und die Größe $a(t)$ wie im behandelten Falle definiert, so gibt es, falls $\mathfrak{x}(t)$ nicht eine ebene Kurve, d. h. einen Kegelschnitt durchläuft, einen eindeutig bestimmten Punkt $\mathfrak{z}(t)$ im Schmiegraum der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ polar zu $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y})$. Ist $\mathfrak{s}$ der Pol von $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und ist die Normierung von $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{s}$ durch $[\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = 1$ bestimmt, so sind die Ableitungsgleichungen (2. 33) durch

$$\mathfrak{z}' = b\mathfrak{x} + c\mathfrak{s}, \quad \mathfrak{s}' = -c\mathfrak{z} \tag{5. 20}$$

zu ersetzen bzw. zu ergänzen. b und c sind Halbinvariante:

$$b^* = \varphi^{-2} b, \quad c^* = \varphi^{-1} c. \tag{5. 21}$$

Durch jede der Forderungen $|b| = 1$ bzw. $c = 1$ kann man einen invarianten Parameter festlegen. $|b| = 1$ erfordert den Ausschluß der Stellen stationären Schmiegkreises, $c = 1$ den Ausschluß der Stellen stationärer Schmiegkugel.

Bezogen auf den invarianten Parameter $c = 1$ sind die Formeln (2. 33), (5. 20) vor kurzem von H. Götz [11] angegeben worden. Für eine geometrische Diskussion ist es zweckmäßig, auf eine invariante Festlegung des Parameters zunächst zu verzichten. Auf die Geometrie der Raumkurven und auf die Theorie der Kreisscharen im Raum, die eine Kurve berühren (diese Theorie läßt sich entsprechend behandeln, vgl. nachstehende Bemerkung i)), soll hier nicht eingegangen werden.

Gegenüber dem ebenen Fall ist für die Theorie der Raumkurven darauf hinzuweisen, daß sich mit einer Parameterverteilung auf der Kurve eine bewegte Basis *nicht eindeutig* verknüpfen läßt. Vielmehr ist (2. 21) durch die schwächere Forderung

$$|(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{s})| = 1 \tag{5. 21}$$

zu ersetzen und damit sind die Vektoren $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{s}$ nur bis auf das Vorzeichen festgelegt. Bei $\bar{\mathfrak{z}} = \varepsilon_1 \mathfrak{z}$, $\bar{\mathfrak{s}} = \varepsilon_2 \mathfrak{s}$ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1)$ wird

$$\bar{b} = \varepsilon_1 b, \quad \bar{c} = c. \tag{5. 22}$$

Indem man über ε_1 verfügt, kann man durch $b = 1$ einen invarianten Parameter einführen, der bis auf das Vorzeichen und eine (unwesentliche) additive Konstante bestimmt ist. Mit dem Vorzeichen dieses Parameters ändert sich nach (5. 21) auch das Vorzeichen der Invarianten c. Ist die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ orientiert, so hat das Vorzeichen von c Bedeutung; bei nichtorientierter Kurve $\mathfrak{x}(t)$ ist dies nicht der Fall. Durch die Forderung $c > 0$ legt man auf der Kurve eine Orientierung fest.

Man vergleiche hierzu auch die vorausstehende Bemerkung g).

i) Die beschriebenen Methoden übertragen sich sofort auch auf die *Theorie der Kreisscharen* der Möbius-Ebene. Ist

$$\bar{\mathfrak{z}}(t) = \mathfrak{z}(t) - \sigma(t)\, \mathfrak{x}(t) \tag{5. 23}$$

die die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ einhüllende Kreisschar, und schneidet der Normalkreis durch $\mathfrak{x}(t)$ aus dem

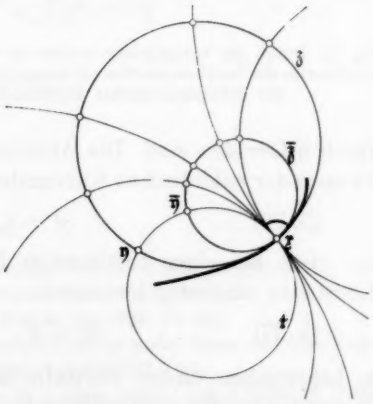


Fig. 16. Abbildung eines Punktes $\bar{\mathfrak{y}}$ des Berührkreises $\bar{\mathfrak{z}}$ auf den Punkt $\mathfrak{y}$ des Schmiegkreises $\mathfrak{z}$ mittels des Normalkreises $\mathfrak{t}$.

Berührkreis $\bar{\mathfrak{z}}(t)$ den Punkt $\bar{\mathfrak{y}}(t)$ aus, so gelten (analog zu (2. 33)) die Ableitungsgleichungen

$$
(5.\,24)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{x}' &= \mathfrak{t}, \\
\mathfrak{t}' &= \bar{a}\mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{y}} + \sigma\bar{\mathfrak{z}}, \\
\bar{\mathfrak{y}}' &= \bar{a}\mathfrak{t} + \bar{b}\bar{\mathfrak{z}}, \\
\bar{\mathfrak{z}}' &= \bar{b}\mathfrak{x} - \sigma\mathfrak{t}.
\end{aligned}
$$

Dabei genügen die Basisvektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}$ wieder der Produkttabelle. Die Invarianten zeigen bei Parametertransformation das Verhalten

$$(5.\,25)\quad \bar{a}^* = \varphi^{-2}(\bar{a} + 2A' - 2A^2),\ \bar{b}^* = \varphi^{-2}(\bar{b} + 2A\sigma),\ \sigma^* = \varphi^{-1}\sigma.$$

Es bestehen die Beziehungen:

$$\bar{a} = a + \tfrac{1}{2}\sigma^2,\ \bar{b} = b - \sigma'.$$

Durch die Normalkreise sind für jedes t Schmiegkreis $\mathfrak{z}(t)$ und Berührkreis $\bar{\mathfrak{z}}(t)$ punktweise eineindeutig aufeinander abgebildet. In dieser Abbildung gilt: Zu der Schar der Orthogonaltrajektorien in der Berührkreisschar gehört in der Schmiegkreisschar die Isogonalschar mit dem Schnittwinkel β:

$$-\operatorname{cotg}\beta = \hat{\beta},\ \hat{\beta} = \frac{\sigma^2}{2b}.$$

Auf weitere geometrische Einzelheiten gehen wir hier nicht ein.

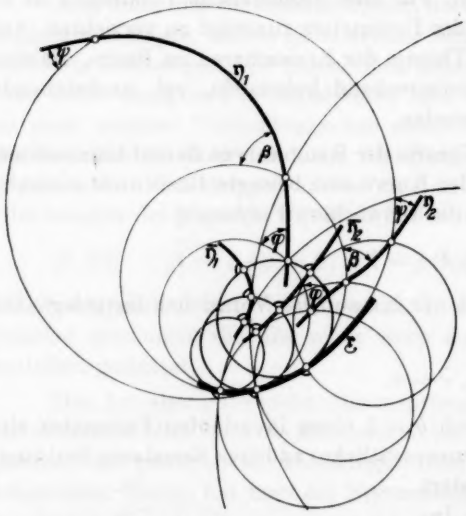


Fig. 17. Durch die Normalkreise werden die Orthogonaltrajektorien der Berührkreisschar auf Isogonaltrajektorien der Schmiegkreisschar abgebildet.

Ist $\bar{\mathfrak{y}}_0$ ein fester Punkt der Möbiusebene und $\bar{\mathfrak{y}}_0$ ein fest normierter Vektor und lassen wir die Berührkreise $\bar{\mathfrak{z}}(t)$ für jedes t durch diesen Punkt $\bar{\mathfrak{y}}_0$ gehen, so können wir die Parameterverteilung so einrichten, daß $\bar{\mathfrak{y}}$ nach Lage und Normierung mit $\bar{\mathfrak{y}}_0$ übereinstimmen:

$$\bar{\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{y}}_0.$$

Die zugehörige Parameterverteilung ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt und ist die *euklidische Bogenlänge* in einer Geometrie, in der die Kreise durch $\bar{\mathfrak{y}}$ Geraden sind. Die Ableitungsgleichungen (5. 24) gehen über in die *Frenetschen Formeln* der euklidischen Kurventheorie. Bezeichnet $\varkappa$ die euklidische Krümmung, so gilt:

$$(5.\,26)\qquad \varkappa = \sigma,\ 2b = \sigma',\ 2a + \sigma^2 = 0.$$

Gilt bei einer bestimmten Parameterverteilung (diese ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt)

$$(5.\,27)\qquad 2b = \sigma',\quad 2a + \sigma^2 = e \text{ mit } e = \pm 1,$$

so beherrschen unsere Formeln die *nichteuklidische Kurventheorie*. Der ausgezeichnete Parameter ist die nichteuklidische Bogenlänge. Für $e = 1$ handelt es sich um die hyperbolische, für $e = -1$ um die elliptische nichteuklidische Geometrie. (Für $e = 0$ kommen wir zum euklidischen Fall zurück.)

k) Wir identifizieren die Möbius-Ebene mit der Gaußschen Zahlenebene! Eine Kurve $z(t)$ dieser Ebene wird mit reellem Kurvenparameter t durch

$$z(t) = \xi(t) + i\eta(t)$$

dargestellt. Nach dem Abbildungsprinzip der Möbiusgeometrie (Abschnitt 1) gehört zu $z(t)$ im Bildraum die Kurve $\mathfrak{x}(t) = (x_0(t),\ x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$ mit

$$z(t) = \frac{x_1(t) + ix_2(t)}{x_0(t)}.$$

Gegenüber der Gruppe der linearen, gebrochenen Transformationen der Gaußschen Zahlenebene (diese Gruppe ist isomorph der Gruppe der sinntreuen Möbius-Abbildungen) ist die sogenannte Schwarzsche Ableitung

$$\{z, t\} = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$$

eine Invariante. Wir setzen zur Abkürzung $p = x_1 + ix_2$, $q = x_0$. Dann findet man

$$(5.\,28)\qquad \left\{\frac{p}{q}, t\right\} = \frac{1}{q^2(p'q - q'p)^2}\cdot\left\{\begin{array}{l} q^2(p'q - q'p)\,(p'''q + p''q' - q''p' - q'''p) \\ -(p'q - q'p)^2(4q'^2 + 2qq'') \\ +2qq'(p'q - q'p)\,(p''q - q''p) - \frac{3}{2}q^2(p''q - q''p)^2 \end{array}\right\}.$$

Auf Grund der Invarianz der Schwarzschen Ableitung kann man diesen Ausdruck im lokalen Koordinatensystem berechnen. Nach den Ableitungsgleichungen (2. 33) erhalten wir

$$\mathfrak{x} = (1, 0, 0, 0),\ \mathfrak{x}' = (0, 1, 0, 0),\ \mathfrak{x}'' = (a, 0, 0, 1),\ \mathfrak{x}''' = (a', 2a, b, 0)$$

und daraus

$$p = 0,\ p' = 1,\ p'' = 0,\ p''' = 2a + ib,$$
$$q = 1,\ q' = 0,\ q'' = a,\ q''' = a'.$$

Setzt man dies in die Formel (5. 28) ein, so folgt

$$(5.\,29)\qquad \{z, t\} = -a + ib.$$

Die Schwarzsche Ableitung hängt noch, wie das Symbol $\{z, t\}$ andeutet, von dem Parameter t ab. Bei Parametertransformation wird nach (2. 39):

$$(-a + ib)^* = \varphi^{-2}(-a - 2A' + 2A^2 + ib)$$

und also:

$$(5.\,30)\qquad \{z, t^*\} = \varphi^{-2}(\{z, t\} + 2A^2 - 2A').$$

Dabei war $\varphi = \dfrac{dt^*}{dt}$ und $A = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi'}{\varphi}$.

Literaturverzeichnis.

[1] *G. Pick*, Theorie der konformen Abbildungen kreisförmiger Bereiche. Palermo Rendic. **37** (1914), 341—345.

[2] *A. Besserve*, Le cercle et les surfaces cerclées en géométrie conforme. Thèse, Paris 1915.

[3] *H. Liebmann*, Beiträge zur Inversionsgeometrie der Kurven. Münch. Ber. **1923**, 79—94.

[4] *G. Thomsen*, Über konforme Geometrie. II: Über Kreisscharen und Kurven in der Ebene und über Kugelscharen und Kurven im Raum. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), 117—147.

[5] *J. Maeda*, Geometrical meanings of the inversion curvature of a plane curve. Jap. J. Math. **16** (1940), 177—232.

[6] *I. Haantjes*, Conformal differential geometry. Curves in conformal euclidean spaces. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **44** (1941), 814—824.

[7] *I. Haantjes*, Conformal differential geometry. Curves in conformal twodimensional spaces. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **45** (1942), 249—255.

[8] *I. Haantjes* und *C. Smits*, De differentiaalmeetkunde van Moebius in het platte vlak. Nieuw Arch. Wiskunde **21** (1943), 34—47.

[9] *W. van der Woude*, On conformal differential geometry. Theory of plane curves. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **51** (1948), 16—24.

[10] *R. Lauffer*, Analytische Kurven auf einer Fläche zweiter Ordnung. Math. Nachr. **9** (1953), 301—306.

[11] *H. Götz*, Zur konformen Kurventheorie. Monatsh. Math. **60** (1956), 205—211.

[12] *G. Bol*, Projektive Differentialgeometrie, 1. Teil, Göttingen 1950.

[13] *G. Bol*, Alternierende Formen und halbinvariante Differentiation. Math. Z. **54** (1951), 141—159.

[14] *G. Bol*, Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurven in der Ebene und im Raum. Arch. Math. **3** (1952), 163—170.

[15] *M. Barner*, Geradengeometrische Kennzeichnung der *W*-Kurven des projektiven Raumes. Arch. Math. **6** (1955), 462—470.

Eingegangen 3. März 1960.

et.

de

er-

2),

. 6